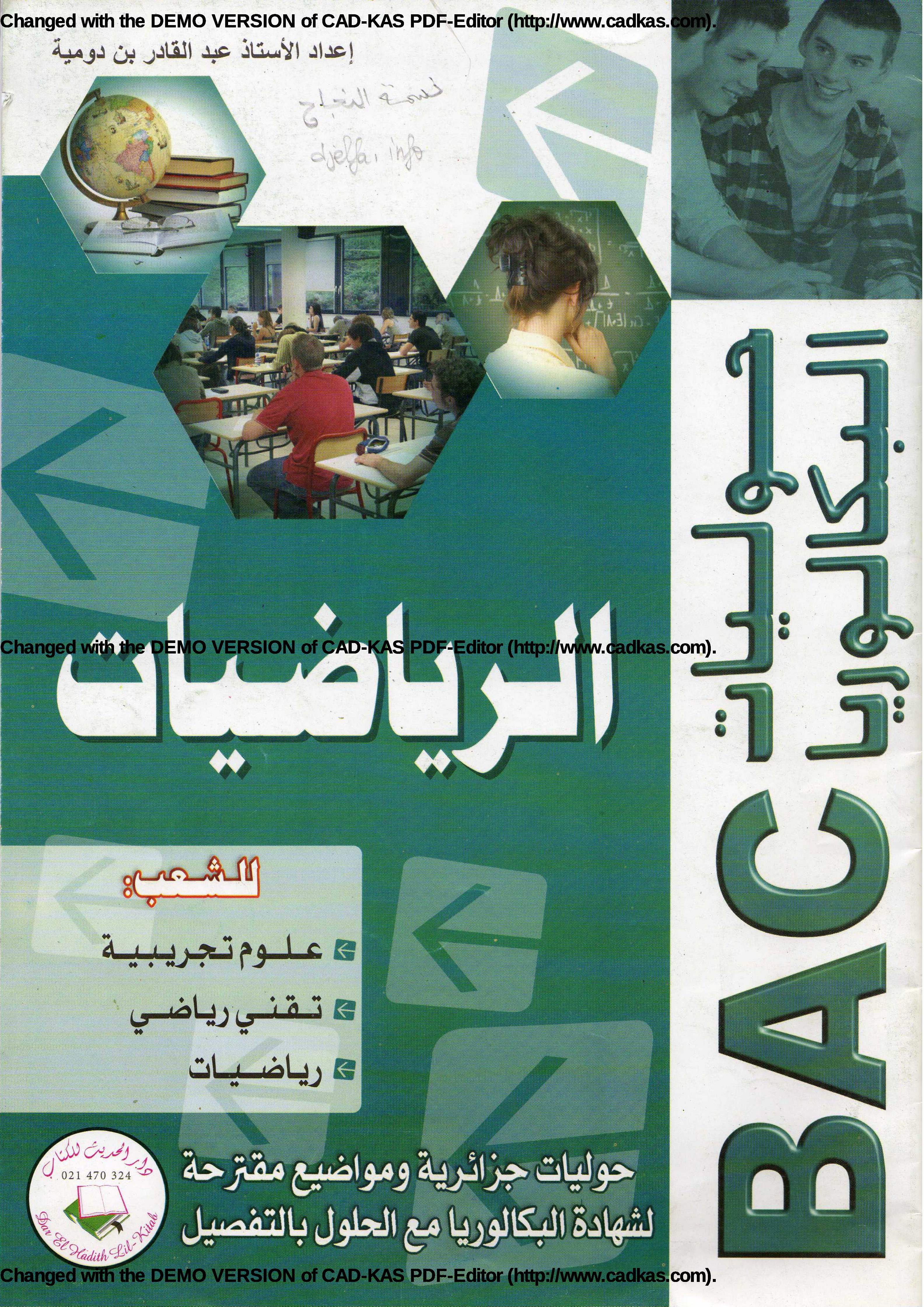


Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

نسمة النجاح

djelfa.info

عبد القادر بن دومية

حوليـــــات البكـــالوريا

لمـــــــادة

الريـــــــاضيات

الشعب :

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

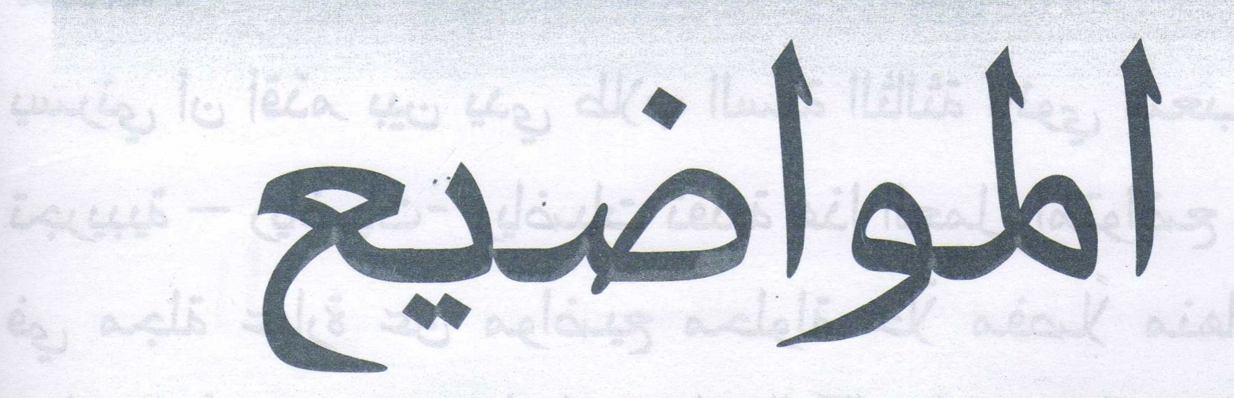
- علوم تجريبية
- رياضيات
- تقني رياضي

حوليات جزائرية ومواضيع مقترحة

لشهادة البكالوريا مع الحلول بالتفصيل

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

نسمة النجاح
djelfa.info



Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

الموضوع الأول (ع ت 2008)

التمرين الأول :

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$$Z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بالرمز Z_1 و Z_2 حيث : $|Z_1| \langle |Z_2|$

بين أن $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2- المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن B, A و C نقط المستوى التي لاحقاتها على الترتيب 1 ، Z_1 ، Z_2

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف : $e^{i\theta}=\cos\theta+\sin\theta$

ومن الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ وأن $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$

حيث : θ ، θ_1 ، θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

جـ) أكتب Z على الشكل المثلثي واستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A يطلب تعيين زاويته ونسبته .

التمرين الثاني :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر المستوى (p) الذي معادلته : $x+2y-z+7=0$.

والنقط $A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$

1/ تحقق أن النقط A و B وَ C ليست على استقامية، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) هي:

$$y+2z-2=0$$

2/أ – تحقق أن المستويين (p) و (ABC) متعامدان، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (p) و (ABC) .

ب- احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

3/ لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1)(B,\alpha),(C,B)\}$ حيث B,α عددان حقيقيان يحققان:

$$1+\alpha+B\neq 0$$

عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ)

التمرين الثالث :

1/ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي إلى I

2/ (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N كما ياتي: $U_0=\frac{3}{2}$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، U_n ينتمي I.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) استنتج أنها متقاربة .

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

ب) عين النهاية :

التمرين الرابع :

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=(ax+b)\ e^{-x}+1$$

حيث a و b عددان حقيقيان .

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$$

و (Cg) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ وعبر هذه النتيجة بيانيا .

(نذكر $\left(\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0\right)$)

ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

جـ) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين (إحداثييها) .

د) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

هـ) ارسم (C_g) .

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما ياتي:

$$H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$$

حيث α و β عددان حقيقيان .

عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0

III) لتكن K الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي : $K(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة، عين اتجاه تغير الدالة K ثم شكل جدول تغييراتها .

الموضوع الثاني (ع ت2008)

التمرين الأول :

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عين الجواب الصحيح معللاً اختيارك .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط : $A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$.

والمستوى (P) الذي معادلته : $x-3z-4=0$

1) المستوى (P) هو : (BCD) (ج$_1$)، (BCD) (ج$_2$)، (BCD) (ج$_3$)

2) شعاع ناظمي للمستوى (P) هو :

ج$_1$) $\vec{n}_1(1,2,1)$ ، ج$_2$) $\vec{n}_2(-2,0,6)$

ج$_3$) $\vec{n}_3(2,0,-1)$

3) المسافة بين النقطة D_2 المستوى (P) هي:

$\frac{\sqrt{10}}{5}$ ج$_1$) ، $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ج$_2$) ، $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ج$_3$)

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي :

$u_0=\frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n.

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$$

1) أ/ ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\Re$ ب : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

ب/ باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل ودون حساب الحدود، u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4

جـ/ ضع تخمينًا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 6$

ب/ تحقق أن (u_n) متزايدة.

جـ/ هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n. $v_n=u_n-6$

أ/ اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ اكتب عبارة U_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثالث :

1/حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول Z التالية :

$$Z^2+iz-2-6i=0$$

2/ نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين، A و B اللتين لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب حيث :

$$Z_A=2+i \quad \text{وَ} \quad Z_B=-2-2i$$

عين Z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3/ لتكن C النقطة ذات اللاحقة Z_C حيث :

$$Z_C=\frac{4-i}{1+i}$$

اكتب Z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4/أ/ برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(Z_0)$ ونسبته k $(k\rangle 0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(Z)$ النقطة $M'(Z')$ هي :

$$Z'-Z_0=ke^{\theta}(Z-Z_0)$$

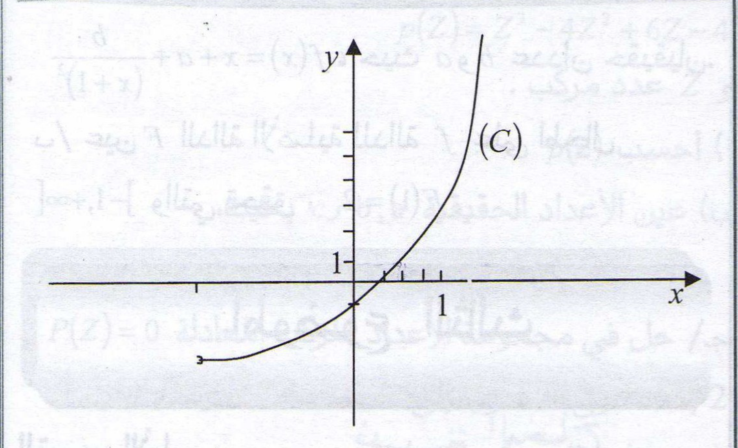
ب/ تطبيق : عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل Z المعرف بـ :

$$Z'+\frac{1}{2}i=2\ell^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$$

التمرين الرابع :

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$



1/أ/ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(o)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب/علّل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

جـ/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

2/ f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما ياتي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$.

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، من المجال $]-1,+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب/ عين دون حساب : $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيًا :

جـ/ احسب $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسّر النتيجتين بيانيا .

د/ شكل جدول تغيرات الدالة f

3/ ناخذ $\alpha\cong 0{,}26$

أ/ عين مدوّر $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}

ب/ ارسم المنحنى (Γ)

4/أ/ أكتب $f(x)$ على الشكل :

، $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب/ عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1,+\infty[$ والتي تحقق : $F(1)=2$

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0=e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n.

$e\ u_{n+1}^2=u_n$ ، نضع كل n من N

$$V_n=\frac{1+L_nu_n}{2}$$

1/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2/ اكتب عبارة ، الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3/ لكل n من N نضع :

$S_n=v_0+v_1+\dots\dots+v_n$ و $p_n=u_0\times u_1\times\dots\dots\times v_n$

أ) عبّر عن S_n بدلالة n ثم استنتج عبارة p_n بدلالة n

ب) حدّد نهاية S_n واستنتج نهاية p_n

التمرين الثاني :

أ) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E): Z^3+2Z^2-16=0$

1/ بين أن 2 حل المعادلة (E) ثم حل فيه $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2/ ضع حلول المعادلة (E) على الشكل المثلي ثم الشكل الأسي.

ب/ المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

أ/ مثل النقط D,B,A ذوات اللواحق $Z_A=-2-2i$ ، $Z_\beta=2$ ، $Z_D=-2+2i$ على الترتيب.

2/ عين لاحقة النقطة C بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

3/لتكن النقطة E صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ و F صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) احسب Z_E و Z_F لا حقتي النقطتين E و F على الترتيب

ب/ مثل النقطتين E و F.

4/أ/ تحقق أن : $\frac{Z_F-Z_A}{Z_E-Z_A}=i$

ب/ استنتج طبيعة المثلث AEF

التمرين الثالث :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس نعتبر النقط : $A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$

1/ بين أن النقطة C,B,A لا تقع في إستقامية واحدة.

2/ ليكن (d) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x=2t-7 \\ y=-3t \\ z=t+4 \end{cases} \quad ، \ t\in\Re$$

أ/ بين أن (d) يعامد المستوى (ABC) .

ب/ عين معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

3/ لتكن H النقطة المشتركة بين (d) والمستوى (ABC)

أ/ بين أن H مرجع الجملة :

$$\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$$

ب/ عين المجموعة (Γ) للنقط M من الفضاء والتي تحقق: $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$ واذكر عناصرها المميزة.

جـ/ هل النقطة $I(-8,1,3)$ تتمنى إلى المجموعة (Γ)؟

التمرين الرابع :

I/ g دالة معرفة على $\Re$ كما يلي :

$$g(x)=2e^x+2x-7$$

1/ ادرس تغيرات الدالة g

2/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $0,94\langle\alpha\langle 0,941$

3/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\Re$.

II/ f دالة معرفة على $\Re$ كما يأتي: $f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$، (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=2cm)$

1/ أدرس تغيرات الدالة f مبينًا أن:

$$f'(x)=e^{-x}.g(x)$$

2/ بين أن $f(\alpha)=\dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

-ادرس اتجاه تغير الدالة:

$h:x\mapsto\dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ على المجال $\left]-\infty,\dfrac{5}{2}\right[$.

- استنتج حصرًا للعدد $f(x)$ سعته 10^{-2} .

3/ بين أن المستقيم (d) الذي معادلته: $y=2x-5$ مقارب مائل المنحنى (C_f) عند $+\infty$.

- حدّد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) .

- ارسم المنحنى (C_f)

4/ أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى(C_f) وحامل محور الفواصل وحامل محور التراتيب والمستقيم الذي معادلته $x=\dfrac{5}{2}$

الموضوع الرابع

التمرين الأول:

العدد i هو العدد المركب الذي طويلته 1و $\dfrac{\pi}{2}$ عمدة له.

1/ نعتبر كثير الحدود $p(z)$ بحيث:

$$p(Z)=Z^3-4Z^2+6Z-4$$

و Z عدد مركب.

أ) أحسب $p(2)$

ب) عين الأعداد الحقيقية b, a وc بحيث:

$$p(Z)=(Z-2)(aZ^2+bZ+C)$$

جـ/ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(Z)=0$

2/ المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ (الوحدة $5cm$).

أ)علّم النقط B, A وC ذات اللواحق:

$Z_A=2$ ، $Z_B=1+i$ و $Z_C=1-i$

على الترتيب.

ب) عين طويلة وعمدة لكل من Z_A ، Z_B ، Z_C .

جـ) بين أن C هي صورة B بدوران مركزه O وزاويته يطلب تحديدها.

د) عين لواحق النقطتين I و J منتصفات القطعتين $[OA]$ و $[BC]$ على الترتيب.

هـ) ماهي طبيعة الرباعي $OABC$؟

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، تعطى النقط $A(1,-1,2)$ $B(-1,1,-2)$

1/ أعط تمثيل وسيطي للمستقيم (AB)

2/ ليكن (P) المستوى الذي يشمل A ويعامد (AB)، و (Q)المستوى الذي معادلته: $x-y+2z+6=0$

أ) عين معادلته ديكارتية للمستوي (p).

ب) تحقق أن المستوى (Q) يشمل β ويوازي المستوى (P).

3/نعتبر سطح الكرة (s) المماسة للمستوى (Q)في النقطة B والتي تقطع المستوى (P) في دائرة (C) مركزها A ونصف قطرها $2\sqrt{3}$ وليكن I مركز (S).

أ) بين أن: $\vec{IA}$ و $\vec{IB}$ مرتبطان خطيًا.

ب) برهن أن: $IB^2-IA^2=12$

(إرشاد : يمكن اعتبار K نقطة تقاطع (C) و (S)
وملاحظة أن المثلث IAK قائم في A) .

التمرين الثالث

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط عين الجواب الصحيح معللاً اختيارك .

1) الحل الذي ينعدم عند الصفر للمعادلة التفاضلية : $y'-2y=-4x$ هو :

ج1) $y=-e^{2x}+2x+1$ ، ج2) $y=e^{2x}+2x-1$

ج3) $y=e^{2x}+x^2-1$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-x^2-3x+2\right)$ تساوي .

ج1) 0 ج2) $+\infty$ ج3) $-\infty$

3) A, B و C نقط من المستوي .
مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=2$ هي :

ج1) مستقيم من المستوى ، ج2) دائرة من المستوى،

ج3) مجموعة خالية.

التمرين الرابع

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=-2x^2+2-Lnx$$

1/ ادرس تغيرات g على المجال $]0,+\infty[$

2/ احسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ،

$f(x)=\frac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$ ونرمز بـ (C) للمنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/أ/ احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$
ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2/أ/ برهن أن المنحنى (C) يقبل المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-2x+2e$ مقارب مائل عند $+\infty$.

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D).

3/ بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حل وحيد x_0 على المجال $]0,1[$
تحقق أن x_0 ينتمي إلى $]0,4,0,5[$.

4/ أنشئ المستقيم (D) والمنحنى (C) .

III/ نعتبر الدالة F المعرفة على $]0,+\infty[$ ب:

$$F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2\ln x$$

ونعتبر الدالة h المعرفة على $]0,+\infty[$ ب:

$$h(x)=f(x)+2x-2e$$

1/ بين أن F هي الدالة الأصلية للدالة h والتي تنعدم عند $x=1$

2/عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون $F(\alpha)$ مساويًا لـ $\frac{3}{2}$.

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

لدينا حجر نرد أوجهه مرقمة ب : 3,3,3,2,2,1 وعلبة فيها حروف كلمة $LOGARITHME$
اقترحت اللعبة التالية. يلقي اللاعب النرد ويسجل رقمها فإذا ظهر الرقم 1 فيسحب عشوائيا كرة من العلبة فيربح إذا تحصل على حرف من المجموعة . $s=\{A,O,E,I\}$ وإذا ظهر الوجه ذو الرقم 2 يسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من العلبة فيربح إذا كان الحرفين المسحوبين كلاهما من S وإذا ظهر الوجه ذو الرقم 3 يسحب 3 كرات في آن واحد فيربح إذا كانت الحروف الثلاثة من S.

نعتبر الحوادث التالية : D_1 ظهور رقم 1 D_2 ظهور رقم 2 ، D_3 ظهور رقم 3 و G واللعبة مربحة .

1/ احسب الإحتمالات التالية :

$P(D_1)$ ، $P(D_2)$ ، $P(D_3)$ ، $P_{D_1}(G)$ ، $P_{D_2}(G)$ ، $P_{D_3}(G)$

2/ استنتج $P(D_1 \cap G)$

3/ أثبت أن : $p(G) = \frac{23}{180}$

4/ نعتبر أن اللاعب قد ربح فما إحتمال أن يكون ظهر الرقم 1.

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0=9$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب :

$$v_n=U_n-3$$

1/ احسب : U_1 ، U_2 ، V_0 ، V_1 ، V_2

2/ بين أن (V_n) متتالية هندسية

3/ استنتج v_n و u_n بدلالة n .

4/ عين $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الثالث :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$،

(C) دائرة مركزها O ونصف قطرها 1.

لتكن $A(1,0)$ وَ $A'(-1,0)$ نقطتين من المستوى و H نقطة من قطعة المستقيم $[AA']$ مختلفة عن A و A'

حيث $\overrightarrow{OH}=x\vec{i}$ (x عدد حقيقي).

نرسم المستقيم (Δ) العمودي على المستقيم (AA') عند النقطة H ويقطع (C) في النقطتين M و M'

1/ بين أن مساحة المثلث AMM' تعطى بالعلاقة : $(1-x)\sqrt{1-x^2}$

2/ نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1,1]$ ب :

$$f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$$

أ/ ادرس تغيرات الدالة f

ب/ أثبت أنه إذا كانت مساحة المثلث AMM' أكبر ما يمكن فإن المثلث AMM' متقايس الأضلاع

التمرين الرابع :

f دالة عددية معرفة على $\Re-\{-2,2\}$ ب : $f(x)=\frac{x^3+2x^2-8}{x^2-4}$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ عين الأعداد الحقيقية c,b,a بحيث يكون من أجل كل x من مجموعة التعريف:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx}{x^2-4}$$

2/ بين أن المنحنى (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (d) يطلب تعيين معادلة له .

3/ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (c) والمستقيم (d).

4/ أدرس تغيرات الدالة f

5/ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α ينتمي للمجال $\left]\frac{-3}{2},-1\right[$

7/ أرسم المنحنى (C)

الموضوع السادس

التمرين الأول :

الفضاء منسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(\vec{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر ثلاث نقط : $A(2,0,0)$ ، $B(1,1,0)$ ، $C(3,2,6)$.

ليكن (D) المستقيم الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{u}(0,1,1)$ و (Δ) المستقيم المار من النقطة B وشعاع توجيهه $\vec{v}(1,3,4)$

1/ عين التمثيل الوسيطي لكلا من (D) و (Δ) وبين أن (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة F يطلب تعيينها

2/ تحقق أن معادلة ديكارتية للمستوى (ABF) هي:

$$x+y-z-2=0$$

3/ احسب المسافة بين النقطة C والمستوى (ABF).

التمرين الثاني :

يوجد في الصندوق 5 أغلفة ، إثنان منهما يحوي كل منهما ورقة ذات 100دج وغلاف آخر يحتوي ورقة ذات 500 دج والغلافان الباقيان فارغان . نسحب من الصندوق غلافان في أن واحد .

1/ ما هو احتمال أن لا يربح اللاعب أي مبلغ ؟

2/ ما هو احتمال أن يربح 200 دج ؟

3/ ليكن المتغير العشوائي X الذي ياخذ قيمة الربح في كل سحب.

أ) عين قانون احتمال المتغير X .

ب) احسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري له .

التمرين الثالث

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ نعتبر القطع المكافئ (P) ذو المعادلة : $y=1-x^2$

والنقطة $M(x_0,y_0)$ من (P) بحيث : $x_0\rangle 0$ و $y_0\rangle 0$

المماس لـ (P) عند النقطة M يقطع محور الفواصل في النقطة A ويقطع محور التراتيب في النقطة B.

1/ بين أن مساحة المثلث OAB هي :

$$S(x_0)=\frac{(x_0^2+1)^2}{4x_0}$$

2/ من أجل أي وضعية للنقطة M تكون هذه المساحة أصغر ما يمكن ؟

التمرين الرابع:

I) g دالة معرفة على $\Re$ كما يلي :

$$g(x)=4e^x-2xe^x-4$$

1/ ادرس تغيرات الدالة g.

2/ بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين فقط على $\Re$ هما 0 و عدد α يحقق : $1{,}59\langle\alpha\langle1{,}6$

3/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\Re$.

II) f دالة معرفة على $\Re$ بـ :

$$f(x)=\frac{2x-2}{e^x-2x}$$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1/ أدرس تغيرات الدالة f .

2/ بين أن $f(\alpha)=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$

استنتج حصرًا سعته 16^{-1} لـ $f(\alpha)$

3/ بين أن (c) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لـ (xx').

أدرس الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة للمستقيمين ثم أنشئ (C)

الموضوع السابع

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

$$u_{n+1}=1-\frac{4}{u_n+3}$$

1/ بين أن $-1\le u_n\le 0$ من أجل كل عدد طبيعي n.

2/ ادرس رتابة المتتالية (u_n) ماذا تستنتج ؟

3/ نعتبر المتتالية (v_n) حيث $v_n=\dfrac{1}{u_n+1}$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية محددًا أساسها وحدّها الأول .

ب) أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n.

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4/ نضع ، $s_n=\dfrac{1}{n^2}(v_0+v_1.....+v_n)$

بين أن لكل عدد طبيعي غير معدوم n.

$$\left|S_n-\frac{1}{4}\right|\le\frac{3}{n}$$

احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

التمرين الثاني :

زهرة نرد مزورة أوجهها تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6

بحيث احتمال ظهور هذه الأوجه p_6,p_5,p_4,p_3,p_2,p_1

وهي متناسبة على الترتيب مع الأعداد 6,5,4,3,2,1 .

1/ عين قانون الاحتمال المرفق بهذه التجربة

2/ نرمي زهرة النرد هذه ونعتبر الحوادث:

A : " الوجه الظاهر يحمل رقما زوجيا "

β : "الوجه الظاهر يحمل رقما أكبر من أو يساوي 3".

C: الوجه الظاهر يحمل الرقم 3 أو 4 " .

أ) احسب احتمالات الحوادث B, A و C

ب) احسب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$

3/ هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ وهل A و C مستقلتان ؟

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة φ المعرفة على $\Re-\{1\}$ بـ :

$$\varphi(x)=\frac{\left|x^3\right|}{(x-1)^2}$$

1/ احسب نهايات φ عند $+\infty$، $-\infty$ و 1 .

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة φ عند الصفر.

3/ احسب $\varphi'(x)$ لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$

4/ برهن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة φ عند $+\infty$.

عين أوّل عدد طبيعي n الأكبر من 1

بحيث : $\varphi(x)-(x+2)\ \le\ \dfrac{1}{10^n}$

لكل $x\ge n$.

التمرين الرابع :

الدالة العددية f معرفة على المجال $I=]-2,+\infty[$

كما ياتي:

$$f(x)=1+x\ln(x+2)$$

(c) تمثيلها البياني في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1/ أ/ احسب $f'(x)$ وَ $f''(x)$ من أجل x من I.

ب) عين إشارة $f''(x)$ ثم استنتج وجود عدد حقيقي وحيد a من المجال $[-0,6,-0,5]$ بحيث $f'(a)=0$

2/ ادرس تغيرات الدالة f.

3/ بين أن $f(a)=\dfrac{a+2-a^2}{a+2}$ ثم استنتج حصرًا لـ $f(a)$

4/ M_0 نقطة من (C) فاصلتها x_0 و (T_{x_0}) المماس للمنحنى (C) في M_0

أ) بين أن (T_{x_0}) يمر بالمبدأ 0 إذا وفقط إذا كان :

$f(x_0)=x_0$. $f'(x_0)$

ب/ استنتج وجود مماسين يمران بالمبدأ 0

5/ أرسم المماسين ثم المنحنى (C).

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

1/ حل في $\Re$ المعادلة : $2x^2+x-10=0$

2/ باستعمال السؤال الأول حل في $\Re$ المعادلات التالية :

$$a)\quad 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-10=0$$

$$b)\quad e^{x-1}-\frac{10}{e}=-3e^{2x-1}$$

$$C)\quad \ln(x+1)+\ln(3x-2)=3\ln 2$$

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية $(\mathrm{v}_n)_{n\ge1}$:

$$\mathrm{v}_n=\frac{e^n+2^n}{e^n-2^n}$$

1) a) بين أن $\mathrm{v}_n\ge0$ من أجل $n\in N$

b) بين أن $(\mathrm{v}_n)_{n\ge1}$ متتالية متناقصة

c) بين أن $(\mathrm{v}_n)_{n\ge1}$ متقاربة .

2) حدد نهاية المتتالية (v_n).

التمرين الثالث :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2+z+1=0$$

حدّد طويلة وعمدة حلي المعادلة z_1 و z_2.

2) نعتبر الأعداد المركبة التالية :

$$Z=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2} \quad ، \quad Z'=z_1^2+z_1z_2+z_2^2$$

$$Z''=z_1^3+z_2^3$$

حدّد الأعداد Z ، Z' و Z''

3) حلّل كثير الحدود $P(Z)=Z^3-1$

واستنتج قيمة Z''

التمرين الرابع :

f دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ ب :

$$f(x)=\frac{\ln(x+3)}{x+3}$$

1/ ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$

2/أ/ تحقق أنه إذا كان : $n\le x\le n+1$ فإن

$$f(n+1)\le f(x)\le f(n)$$

حيث n عدد طبيعي .

ب) (u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي :

$$u_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$$

دون حساب عبارة (u_n) برهن أن :

$f(n+1)\le u_n\le f(n)$ لكل n من N

جـ) استنتج أن (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

3/ g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ ب :

$$g(x)=[\ln(x+3)]^2$$

أ) عين $g'(x)$ ثم أحسب :

$$I_n=\int_0^n f(x)dx$$

ب) نضع : $S_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_{n-1}$

- احسب S_n بدلالة n.

- هل المتتالية (S_n) متقاربة ؟

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

يحتوي كيس على 8 كرات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرة واحدة تحمل الرقم 5.

نسحب من الكيس كرتين في آن واحد

1/ احسب احتمال سحب كرتين رقم كل منهما عدد أولي

2/ احسب احتمال سحب كرتين مجموع رقميهما عدد فردي .

3/ ليكن x المتغير العشوائي الذي يرفق لكل سحب العدد $|x-y|$ حيث x و y رقما الكرتين المسحوبتين

أ/ ما هي قيم المتغير العشوائي x ؟

ب/ عين قانون احتمال المتغير x ثم احسب أمله الرياضي

التمرين الثاني :

نعتبر العدد المركب :

$$Z=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

1) احسب Z^2 ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب Z^2

2) عين الطويلة وعمدة للعدد المركب Z.

3) استنتج أن : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

و $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

التمرين الثالث :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيم (Δ) المعرف ب :

$$\begin{cases} x=\upsilon-1 \\ y=\upsilon+1 \\ z=2 \end{cases} \quad , \quad \upsilon\in\Re$$

1/ لتكن النقطة : $A(0,1,3)$

أ/ بين أن A لا تنتمي إلى (Δ).

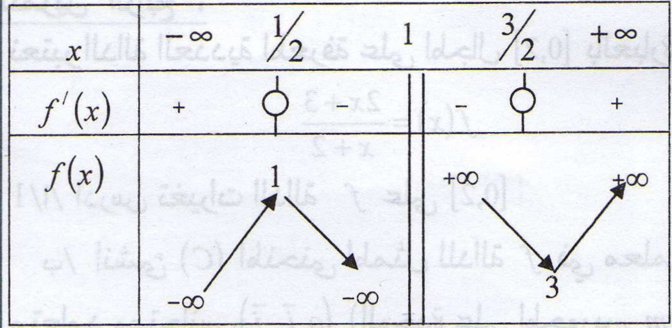
ب/ (Q) المستوي الذي يشمل A ويعامد (Δ).

عين إحداثي النقطة B ، نقطة تقاطع (Q) و (Δ).

2/ ليكن (π) المستوي الذي يشمل A ويحوي (Δ). عين تمثيلاً وسيطيًا لِ (π)

التمرين الرابع :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على كل مجال مجموعة تعريفها لها جدول التغيرات التالي:



x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

لتكن عبارة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

حيث c,b,a أعداد حقيقية.

1/ أحسب $f'(x)$

2/ اعتمادًا على جدول تغيرات الدالة f.

أ) عين الأعداد الحقيقية c,b,a.

ب) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$

وفسّر النتيجة بيانيا.

جـ) قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللاً إجابتك.

3/ ناخذ فيما يلي: $C=\frac{1}{4}$ ، $b=1$ ، $a=1$ وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد متجانس.

أ) بين أن عندما يؤول x إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإن المنحنى (C) يقبل مستقيمًا مقاربًا (Δ) معادلته: $y=x+1$

ب) أدرس وضعية المنحى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

جـ) أثبت أن النقطة $W(1,2)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

د) عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل الفواصل ثم أرسم (C)

4) v عدد حقيقي ، عين بيانيا حسب قيم v عدد حلول المعادلة:

$$f(x)=|v|$$

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

الدالة كثير الحدود أ معرفة على $\Re$ بـ:

$$p(x)=x^2+4x^2+4x+\frac{1}{2}$$

1/ شكل جدول تغيرات الدالة (P) على $\Re$.

2/ بين أن المعادلة $p(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α في المجال $\left]-\frac{1}{2},0\right[$.

3/ استنتج إشارة $p(x)$ على $\Re$

4/ الدالة العددية G معرفة على $\Re$ كما يلي:

$$G(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2+\frac{1}{2}x$$

عين اتجاه تغير الدالة G على $\Re$.

(لا يطلب حساب $G(\alpha)$)

التمرين الثاني :

المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A_2,A_1,A_0 ذات اللواحق

$Z_2=-4-i$ ، $Z_1=-1-4i$ ، $Z_0=5-4i$

على الترتيب.

1/أ/برّر أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث $S(A_1)=A_2$ و $S(A_0)=A_1$

ب/ بين أنّ الكتابة المركبة للتشابه S هي:

$$z'=\frac{1-i}{2}z+\frac{-3+i}{2}$$

جـ/ إستنتج النسبة الزاوية واللاحقة W للمركز Ω للتشابه S.

د/ نعتبر M و M′ نقطتين من المستوى لاحقتيهما Z و Z' على الترتيب حيث $S(M)=M'$ و $z\neq w$

تحقق من العلاقة :

$$w-z'=i(z-z')$$

استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

2/ من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرف النقطة A_{n+1} بـ:

$$A_{n+1}=S(A_n)$$

ونضع : $u_n=A_n\,A_{n+1}$

برهن أن (u_n) متتالية هندسية .

3 / المتتالية (V_n) معرفة على N بـ :

$$V_n=u_0+u_1+.......+u_n$$

أ) عبّر عن V_n بدلالة n.

ب) هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟

التمرين الثالث :

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$

نقط من هذا الفضاء .

1/برهن أن النقط C,B,A تعيّن مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية .

2/ نعتبر المستويين (p_1) و (p_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$$(p_1):x-2y+2z-1=0$$

$$(p_2):x-3y+2z+2=0$$

بين أن (p_1) و (p_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

3/ بين أن النقطة C تنتمي إلى (Δ).

4/ بين أن الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ هو أحد أشعة توجيه المستقيم (Δ).

5/ استنتج أن التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو :

$$\begin{cases}x=2k+1\\y=3\\z=-k+3\end{cases},\quad k\in\Re$$

6/ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ).

أوجد قيمة K حتى يكون الشعاعان $\vec{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,2]$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$$

1/أ/ ادرس تغيرات الدالة f على $[0,2]$

ب/ أنشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة على المحورين $4cm$)

جـ/ برّر أنه إذا كان $x\in[0,2]$ فإن $f(x)\in[0,2]$

2/ نعرّف المتتالية (u_n) على N كالآتي :

$$\begin{cases}u_0=0\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$$

أ) برّر [illegible] المتتالية (u_n) [illegible] u_2

ب)مثّل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

جـ) ضع تخمينًا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها إنطلاقًا من التمثيل السابق.

3/أ/ برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أنّ :

$$O\leq U_n\leq\sqrt{3}$$

ب/ برن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن :

$$U_{n+1}\rangle\,U_n$$

ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

جـ/ تحقق أنّ :

$$U_{n+1}-\sqrt{3}\;\leq\;\frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2}\;\left(U_n-\sqrt{3}\right)$$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم عين عددًا حقيقيًا k من $]0,1[$ بحيث :

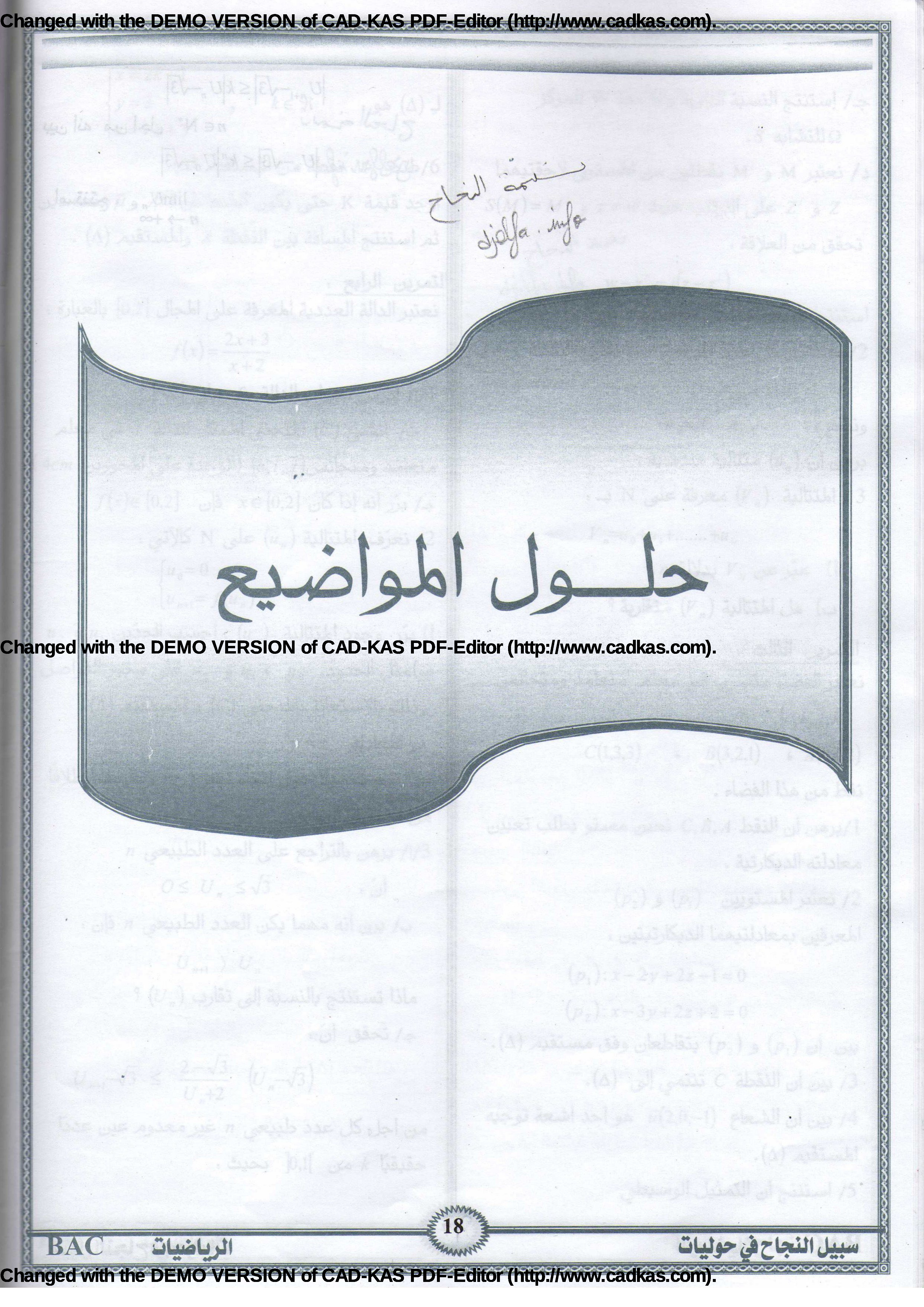
$$\left|U_{n+1}-\sqrt{3}\right| \le k\left|U_n-\sqrt{3}\right|$$

نسمة النجاح

بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$

djelfa.info $\left|U_n-\sqrt{3}\right| \le k^n\left|U_0-\sqrt{3}\right|$

استنتج : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$



حلــول المواضيع

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

نسمة النجاح

1. حلول المعادلة :

$$Z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

$$\Delta=(1+2i)^2-4(-1+i)=1$$

$$Z_1=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

$$Z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

بيان أن $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2008}\times e^{-502\pi i}$$

$$=\frac{1}{2^{1004}}(\cos(-502\pi)-i\sin(502\pi))$$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}=\frac{1}{2^{1004}}$$

إذن : $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2/ أ)

$$e^{-i\vartheta}=\cos(-\vartheta)+i\sin(-\vartheta)$$

$$e^{-i\vartheta}=\cos\vartheta-i\sin\vartheta$$

$$e^{-i\vartheta}=\frac{(\cos\vartheta-i\sin\vartheta)(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)}{\cos\vartheta+i\sin\vartheta}$$

$$e^{-i\vartheta}=\frac{\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}{e^{i\vartheta}}=\frac{1}{e^{i\vartheta}}$$

$$\frac{e^{i\vartheta_1}}{e^{i\vartheta_2}}=e^{i\tau_1}\times\frac{1}{e^{i\vartheta_2}}=e^{i\vartheta_1}\times e^{-i\varphi_2}$$

$$\frac{e^{i\vartheta_1}}{e^{i\vartheta_2}}=e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}$$

ب/ كتابة Z على شكل الأسي:

$$Z=\frac{1+i-1}{i}=\frac{i}{-1+i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e\frac{3\pi}{4}}$$

$$Z=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

جـ)

$$Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(COS\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(COS\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$

- الإستنتاج :

$$|Z|=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Arg(Z)=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{7\pi}{4}+2\pi k/k\in Z$$

أي أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A وزاويته $\frac{7\pi}{4}$ ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$

التمرين الثاني :

1/ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\frac{x_c-x_A}{x_\beta-x_A}=\frac{-3}{1}=-3$ وَ $\frac{y_e-y_A}{y_B-y_A}=\frac{-2}{2}=-1$

ومنه $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ $-3\neq-1$

غير مرتبطين خطيا.

أي C,B,A ليس على إستقامية .

بيان أن : $(ABC): y+2z-2=0$

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

لدينا : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ وَ $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

ومنه :

$$\begin{cases}a+2b-c=0............(1)\\-3a-2b+c=0.......(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد : $-2a=0$ أي $a=0$

نعوض في (1) نجد : $C=2b$

من أجل $b=1$ يكون $\vec{n}(0,1,2)$

$M(n,y,z)$ نقطة من الفضاء .

$M\in(ABC)$ معناه $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$$0(x-2)+1(y)+2(z-1)=0$$

نجد :

$$(ABC): y+2z-2=0$$

2/أ/ التحقق أن (P) و (ABC) متعامدان .

$\vec{n'}(1,2,-1)$ شعاع ناظمي لـ (P)

$\vec{n}.\vec{n'}=0\times1+1\times2+2(-2)=0$

إذن (P) و (ABC) متعامدان .

- تعيين التمثيل الوسيطي لـ (Δ)

$$\begin{cases} y+2z-2=0..........(1) \\ x+2y-z+7=0.....(2) \end{cases}$$

من (1) نجد : $y=-2z+2..........(3)$

نعوض في (2) نجد :

$x-4z+4-z+7=0$

أي $x=5z+11$

بوضع $z=t$ نجد:

$$\begin{cases} x=5t+11 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases},t\in\Re$$

ب/ حساب المسافة بين A وَ (Δ)

بما أن $A\in(ABC)$ وَ $(ABC)\perp(P)$

فإن المسافة بين A وَ (Δ) هي المسافة بين A وَ (P)

$$\text{d}=\frac{|1(2)+2(0)-1(1)+7|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

3/ تعيين α بحيث $G\in(\Delta)$

لدينا $G\in(\text{P})\cap(ABC)$ وَ

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta} \\ y_G=\dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} \\ z_G=\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$

بالتعويض في معادلتي (P) و (ABC) نجد :

$$\begin{cases} \dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}+\dfrac{2+4\beta}{1+\alpha+\beta}-2=0 \\ \dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta}+\dfrac{4\alpha-4\beta}{1+\alpha+\beta}-\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}+7=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha-2\beta+2+4\beta-2-2\alpha-2\beta=0 \\ 2+3\alpha-\beta+4\alpha-4\beta-1-2\beta+7+7\alpha+7\beta=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=0 \\ 14\alpha+8=0 \end{cases}$$

ومنه : $\alpha=\dfrac{-4}{7}$

التمرين الثالث :

أ/ بيان أن f متزايدة تمامًا على I .

f تقبل الإشتقاق على I حيث :

$$f'(x)=\frac{1(-x+4)-(-1)(x+2)}{(-x+4)^2}$$

$f'(x)=\dfrac{6}{(-x+4)^2}$ ، $f'(x)\rangle0$

لكل x من I أي f متزايدة تمامًا على I.

ب/ بيان أن $f(x)\in\text{I}$

لدينا : $1\leq x\leq2$ ومنه :

$f(1)\leq f(x)\leq f(2)$ لأن f متزايدة تمامًا على I

إذن : $1\leq f(x)\leq2$

أي $f(x)\in\text{I}$

2/ أ) برهان أن : $u_n\in\text{I}$

من أجل $n=0$: $u_0=\dfrac{3}{2}$ و $\dfrac{3}{2}\in\text{I}$

أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n

أي : $u_n\in\text{I}$

نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\in\text{I}$

لدينا : $u_n\in\text{I}$ ومنه $f(u_n)\in\text{I}$

حسب السؤال ب/

أي : $u_{n+1}\in\text{I}$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

فإن $u_n\in\text{I}$ ، لكل عدد طبيعي n

ب/ اتجاه تغير المتتالية (U_n):

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+2}{-U_n+4}-U_n$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2-4U_n+U_n+2}{-U_n+4}$$

$$U_{u+1}-U_n=\frac{(U_n-1)(U_n-2)}{-U_n+4}$$

بما أن : $1\le U_n\le 2$ فإن :

$(U_n-1)(U_n-2)\le 0$ وَ $-U_n+4\ge 0$

$U_{n+1}-U_n\le 0$ ومنه (U_n) متناقصة

الإستنتاج :

لدينا (U_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

3) لتكن $p(n)$ الخاصية :

$$U_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

من أجل $n=0$:

$$U_0=1+\frac{1}{1+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

أي $p(0)$ صحيحة

نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي :

$$U_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

نبرهن صحة $p(n+1)$ أي :

$$U_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$$

لدينا :

$$U_{n+1}=\frac{U_n+2}{U_n+4}=\frac{1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}+2}{-1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}+4}$$

$$U_{n+1}=\frac{3+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}{3-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}$$

$$U_{n+1}=\frac{3+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}{3-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}$$

$$U_{n+1}=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$$

نجد :

$$U_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$$

إذن $p(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن :

لكل n من N $\quad U_n=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ج) $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$

التمرين الرابع :

/I $\quad f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعيين a و b حيث : $f(-1)=1$ وَ $f'(-1)=-e$

f تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$:

$$f'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}$$

$$f'(x)=-(ax+b-a)e^{-x}$$

نجد : $\begin{cases}f(-1)=1\\ f'(-1)=-e\end{cases}$ يعني $\begin{cases}(-a+b)e+1=1\\ -(-2a+b)e=-e\end{cases}$

$a=-1$ وَ $b=-1$

أي : $f(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

(II $\quad g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

(1 $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x}+1)=1$

التفسير : (Cg) يقبل مستقيم مقارب أفقي عند $+\infty$ معادلته $y=1$.

ب) دراسة تغيرات الدالة g.

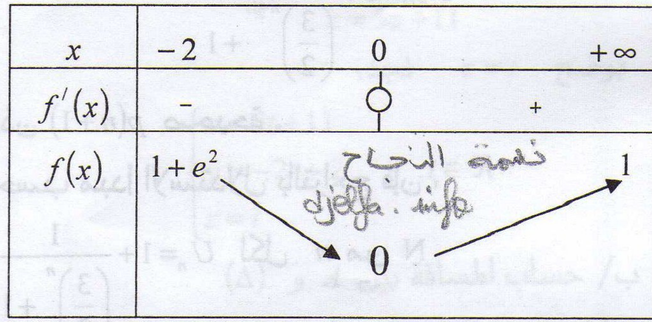
g تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$: $g'(x)=xe^{-x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

g متناقصة تماما على $[-2,0]$ ومتزايدة تماما على $[2,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g.



x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1+e^2$	↘	0	↗	1

ج) g' تقبل الإشتقاق على $]-2,+\infty[$:

$g''(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

x	-2		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة المشتقة الثانية g'' انعدمت عند 1 وغيرت من إشارتها بجوار 1 إذن النقطة $I\left(1,1-\frac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_g)

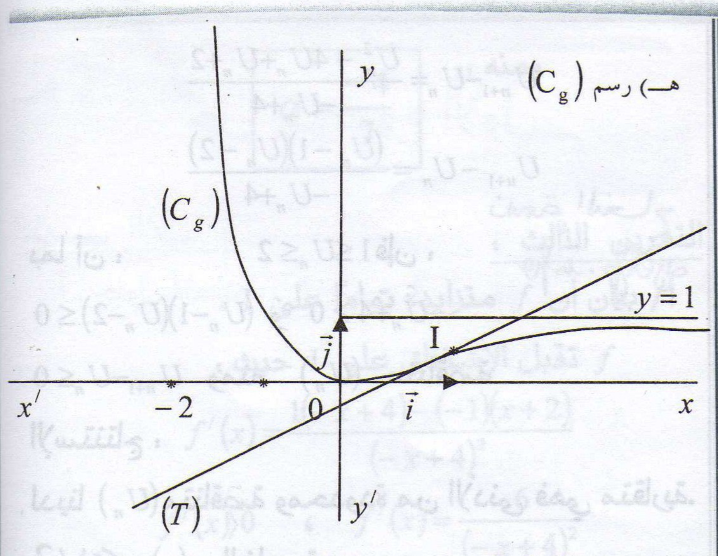
د/ معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند I :

$(T): y=g'(1)(x-1)+g(1)$

$y=\frac{1}{e}(x-1)+1-\frac{2}{e}$

$$\boxed{y=\frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}}$$

هـ) رسم (C_g)



و/ H دالة أصلية لـ $x\to g(x)-1$

معناه : $H'(x)=g(x)-1$

لكل x من $]-2,+\infty[$:

$H'(x)=\alpha e^{-x}-(\alpha x+\beta)e^{-x}$

$H'(x)=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)^{e-x}$

بالمطابقة نجد :

$\begin{cases}-\alpha=-1\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=+1\\ \beta=2\end{cases}$

$H(x)=(x+2)e^{-x}$

إستنتاج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند 0

$F(x)=(x+2)e^{-x}+x+c$

F دالة أصلية لـ g

$F(0)=0$ معناه $2+c=0$ أي $c=-2$

F معرفة على $]-2,+\infty[$ بـ :

$F(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$

III/ K تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$

حيث :

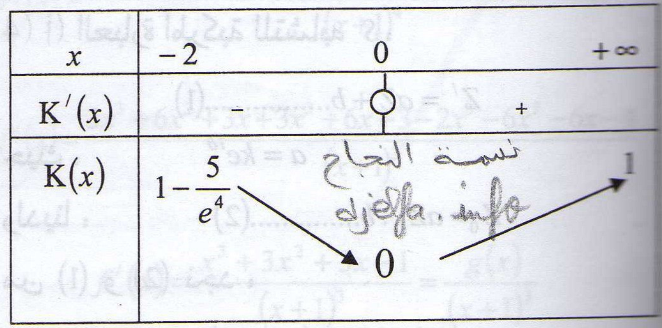
$K'(x)=2x\ \ g'(x^2)$

$K'(x)=2x.x^2e^{-x2}=2x^3e^{-x^2}$

إشارة $K'(x)$ هي إشارة x.

K متناقصة تماما على المجال $[-2,0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

جدول تغيرات K.



x	-2		0		$+\infty$
$K'(x)$		$-$	0	$+$	
$K(x)$	$1-\frac{5}{e^4}$	↘	0	↗	1

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) ج$_2$) (P) هو (ABC) لأن $D\notin(P)$

2) $\vec{n}(1,0,-3)$ شعاع ناظمي لـ (P) مرتبط خطيا مع $\vec{n_2}(-2,0,6)$ حيث : $\vec{n_2}=-2\vec{n}$

ج$_2$) هو الجواب الصحيح .

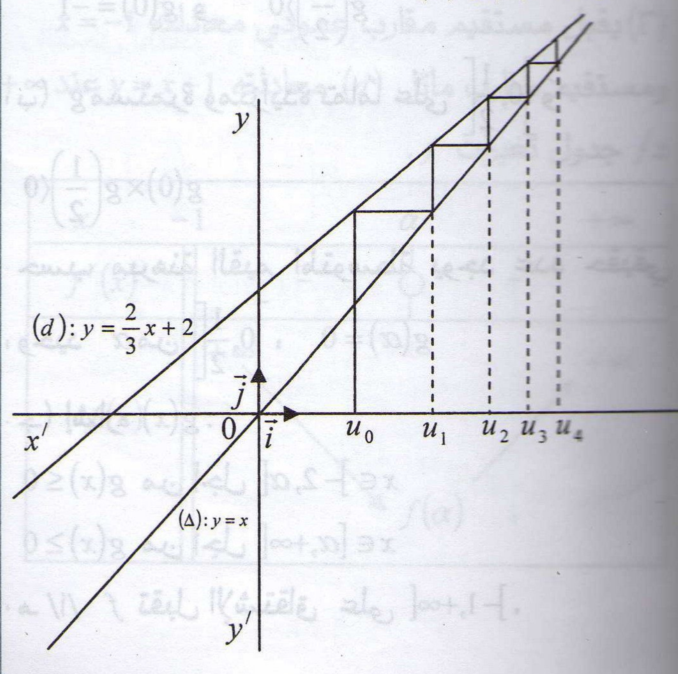
3) المسافة بين (D) و (P) :

$$d=\frac{|3-3(1)-4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

ج$_3$) هو الجواب الصحيح .

التمرين الثاني :

1/ أ) رسم (Δ) و (d) .



ب) تمثيل الحدود u_4,u_3,u_2,u_1,u_0

ج) التخمين هو : (u_n) متزايدة ومتقاربة .

2/أ/ لتكن $p(n)$ الخاصية : $u_n\le 6$

من أجل $n=0$: $u_0\le 6$ صحيحة لأن $\frac{5}{2}\le 6$.

نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي : $u_n\le 6$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}\le 6$

لدينا : $u_n\le 6$ وَ $\frac{2}{3}u_n\le 4$

ومنه : $\frac{2}{3}u_n+2\le 6$

أي : $u_{n+1}\le 6$

إذن $p(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع .

فإن : $u_n\le 6$ لكل $n\in N$.

ب) التحقق أن (u_n) متزايدة من أجل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+2-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{6}{3}=-\frac{1}{3}(u_n-6)$$

لدينا $u_n-6\le 0$ ومنه $-\frac{1}{3}(u_n-6)\ge 0$ أي: $u_{n+1}-u_n\ge 0$

إذن : (u_n) متزايدة .

ج) (u_n)متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ) من أجل كل عدد طبيعي n.

$$V_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{2}{3}u_n+2-6$$

$$V_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-4=\frac{2}{3}(u_n-6)$$

$$V_{n+1}=\frac{2}{3}V_n$$

أي (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول

$$V_0=-\frac{7}{2}$$

ب) $U_n=V_n+6=-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+6$

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=6$ لأن $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$

التمرين الثالث :

/1 $Z^2+iZ-2-6i=0$

$\Delta = i^2-4(1)(-2-6i)=7+24i$

إيجاد الجذران التربيعيات لـ Δ

ليكن $w=x+iy$ جذر تربيعي لـ Δ.

ومنه : $w^2=\Delta$

أي :
$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \ldots\ldots\ldots(1)\\ x^2-y^2=7 \ldots\ldots\ldots(2)\\ 2xy=24 \ldots\ldots\ldots(3)\end{cases}$$

من (1) و (2) وبالجمع طرفًا لطرف نجد :

$2x^2=32$ أي $x^2=16$

ومنه $x=4$ أي $x=-4$

نعوض في (3) نجد .

لما $x=4$ فإن $y=3$

لما $x=-4$ فإن $y=-3$

$w_1=4+3i$ ، $w_2=-4-3i$ هما جذرا Δ.

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

$$Z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{-i+4+3i}{2}=2+i$$

$$Z_2=\frac{-b-w_1}{2a}=\frac{-i-4-3i}{2}=-2-2i$$

/2 $$Z_w=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{2+i-2-2i}{2}$$

$$Z_w=-\frac{1}{2}i$$

/3 $$Z_C=\frac{(4-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-5i}{2}$$

$$Z_C=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$$

إثبات أن $C\in(\Gamma)$

يكفي إثبات أن المثلث ABC قائم في النقطة C.

$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{7}{2}\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{2}\right)+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ متعامدان

إذن ABC قائم في C

ومنه $C\in(\Gamma)$

4) أ) العبارة المركبة للتشابه S :

$Z'=aZ+b$................(1)

حيث : $a=ke^{i\vartheta}$

ولدينا : $Z_0=aZ_0+b$............(2)

من (1) و (2) نجد :

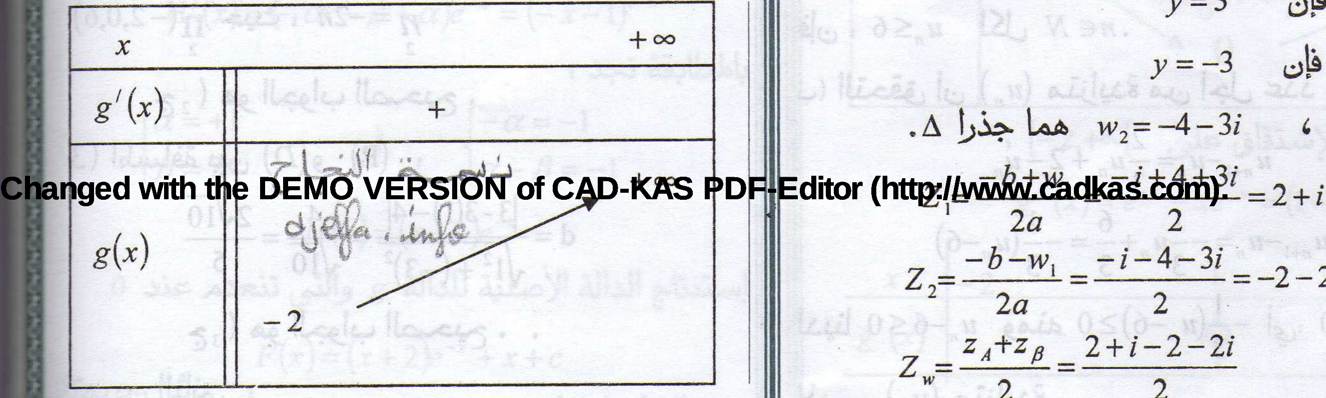
$$Z'-Z_0=a(Z-Z_0)$$

$$Z'-Z_0=ke^{i\varphi}(Z-Z_0)$$

ب) S عبارة عن تشابه مباشر مركزه $M_0\left(-\frac{1}{2}i\right)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته $k=2$

التمرين الرابع :

1/ أ) جدول تغيرات g



x	$+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	-2 ↗

$g(0)=-1$ وَ $g\left(\frac{1}{2}\right)>0$

ب) g مستمرة ومتزايدة تمامًا على $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ وَ

$$g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ ؛ $g(\alpha)=0$

جـ) إشارة $g(x)$:

$g(x)\le 0$ من أجل $x\in\left]-2,\alpha\right[$

$g(x)\ge 0$ من أجل $x\in\left[\alpha,+\infty\right[$

هـ /أ/ f تقبل الإشتقاق على $\left]-1,+\infty\right[$.

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=0$$

تفسير النتيجة:

(Γ) يقبل مماس يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α.

جـ/ $\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases} x^3+3x^2+3x+2\to 1\\ (x+1)^2\to 0^+\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\left[\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)\right]$$

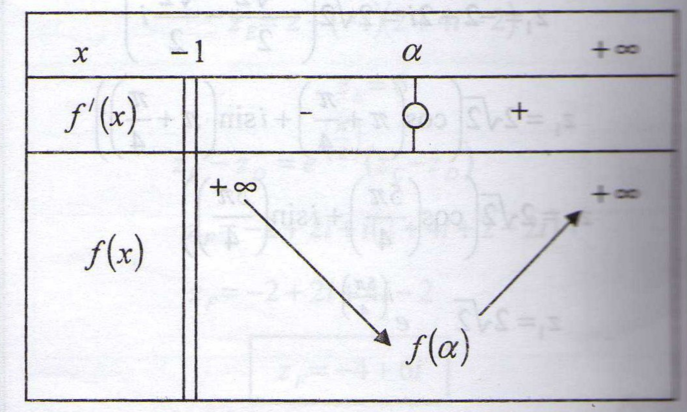
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

التفسير:

(Γ) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-1$

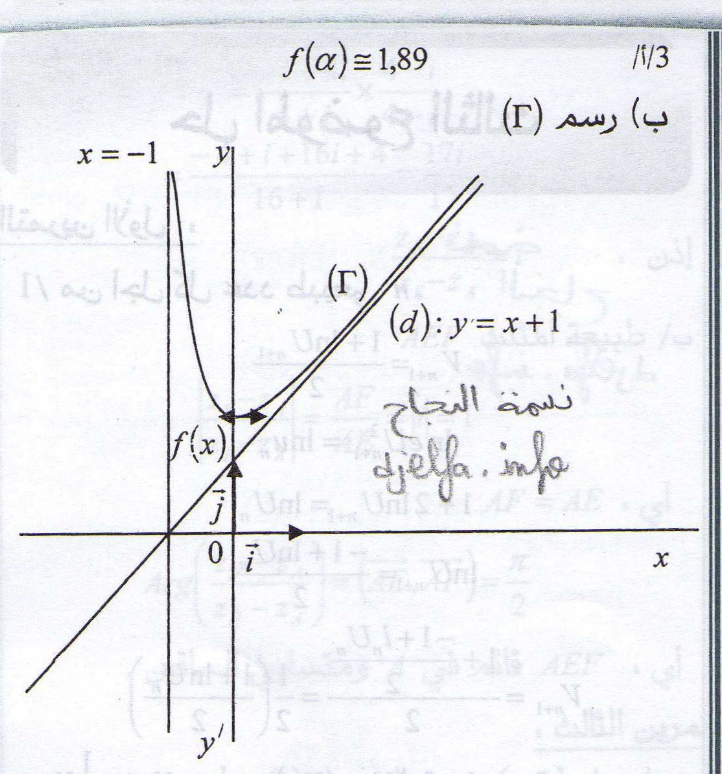
ومستقيم مقارب مائل (d) معادلته $y=x+1$ عند $+\infty$.

د/ جدول تغيرات f.



3/أ $f(\alpha)\cong 1{,}89$

ب) رسم (Γ)



4/أ

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+1+1}{(x+1)^2}$$

$$f(x)=\frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2}$$

$$f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$$

ب/ f دالة مستمرة على المجال $]-1,+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية وحيدة F تحقق $F(1)=2$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{x+1}+C$$

$F(1)=2$ يكافئ $\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+C=2$

نجد $\boxed{C=1}$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{x+1}+1$$

حل الموضوع الثالث

التمرين الأول :

نسمة النجاح

djelfa.info

1/ من أجل كل عدد طبيعي n.

$$V_{n+1}=\frac{1+\ln U_{n+1}}{2}$$

$$\ln eU_{n+1}^2=\ln u_n$$

$$1+2\ln U_{n+1}=\ln U_n$$

$$\ln U_{n+1}=\frac{-1+\ln U_n}{2}$$

$$V_{n+1}=\frac{1+\frac{-1+l_nU_n}{2}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\ln U_n}{2}\right)$$

أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$. أي (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدّها الأول .

$$V_0=\frac{1+\ln U_0}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

2/ من أجل كل عدد طبيعي n.

$$V_n=V_0 \,.\, q^n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$2V_n=1+\ln U_n$ ومنه $U_n=e^{2v_n-1}$

أي : $U_n=e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}$

3/أ/ عبارة S_n بدلالة n.

$$S_n=V_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{3}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_n=3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$P_n=e^{2v_0-1}\times e^{2v_1-1}\times \;.\; \times e^{2v_n-1}$$

$$p_n=e^{2s_n-(n+1)}=e^{6-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n-1}$$

$$p_n=e^{5-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n}$$

ب/ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=3$ لأن $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\to 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=0$ لأن $5-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n\to-\infty$

التمرين الثاني :

1/ $2^3+2(2)^2-16=8+8-16=0$

أي 2 حل للمعادلة (E)

حل في C المعادلة (E)

(E) يكافئ $(z-2)(az^2+bz+c)=0$

يكافئ $az^3+(b-2a)z^2+(c+2b)z-2c=0$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases}a=1\\ b-2a=2\\ c-2b=0\\ -2c=-16\end{cases}$$

نجد : $a=1$ ، $b=4$ ، $c=8$

(E) يكافئ

$$\begin{cases}z=2\\ \text{أو}\\ z^2+4z+8=0 ......(E)'\end{cases}$$

حلول المعادلة $(E)'$:

$$D'=(2)^2-(1)(8)=-4=(2i)^2$$

$$z_2=-2+2i \quad , \quad z_1=-2-2i$$

S حلول المعادلة (E):

$$S=\{2,-2-2i,-2+2i\}$$

2 / الشكل المثلثي و الأسى للحلول

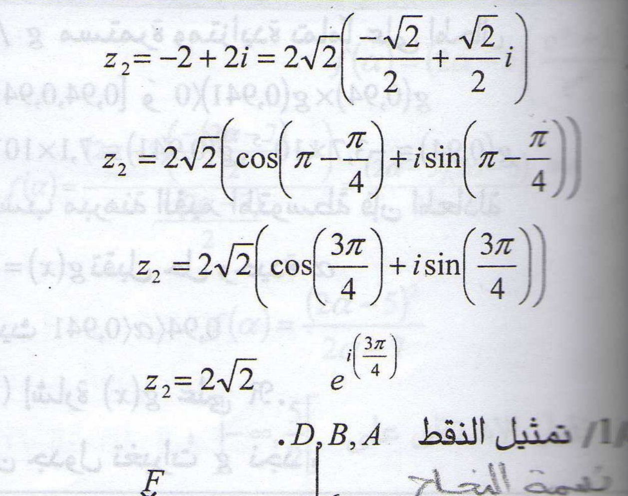
$$z_0=2=2(\cos 0+i\sin 0)=2e^{i(\theta)}$$

$$z_1=-2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_1=2\sqrt{2}\quad e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$$



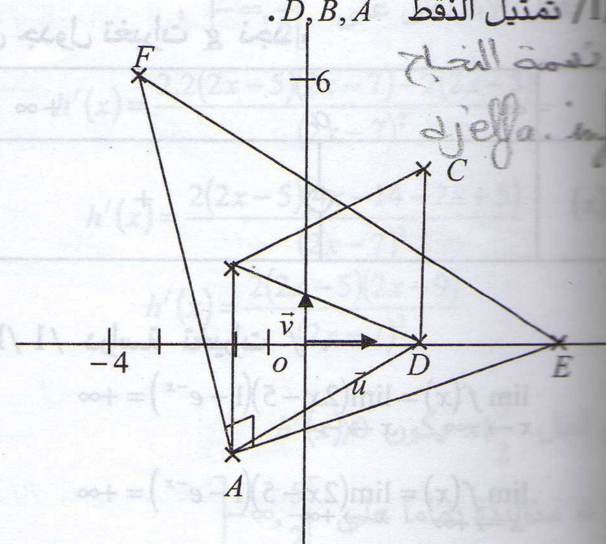
$$z_2 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \quad e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

1/ تمثيل النقط D, B, A.



2/ $ABCD$ متوازي أضلاع يعني :

$$z_C - z_D = z_B - z_A$$

$$z_C = -2+2i+2+2+2i$$

$$z_C = 2+4i$$

3/ أ) حساب z_E و z_F

$$z_E - z_\beta = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_c - z_\beta)$$

$$z_E = 2+(-i)(2+4i-2)$$

$$z_E = 6$$

$$z_F - z_D = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}(z_C - z_D)$$

$$z_F = -2+2i+i(2+4i+2-2i)$$

$$z_F = -2+2i+4i-2$$

$$\boxed{z_F = -4+6i}$$

4/

$$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-4+6i+2+2i}{6+2+2i} = \frac{-2+8i}{8+2i}$$

$$= \frac{-1+4i}{4+i} \times \frac{4-i}{4-i}$$

$$= \frac{-4+i+16i+4}{16+1} = \frac{17i}{17} = i$$

إذن : $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$

ب/ طبيعة المثلث AEF

$$\left|\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right| = \frac{AF}{AE} = |i| = 1$$

أي : $AF = AE$

$$Arg\left(\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) = \frac{\pi}{2}$$

أي : AEF قائم في A ومتساوي الساقين .

التمرين الثالث :

1/ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

لا يوجد عدد حقيقي k : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

إذن C, B, A لا تقع في إستقامية.

2/أ/ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\+1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (d)

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2(-5)+(-3)(-2)+(+1)(4) = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2-3+1 = 0$$

$\vec{n}$ يعامد كلا من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

اذن (d) يعامد المستوي (ABC)

((d) يعامد المستقيمين المتقاطعين (AB) و (AC))

ب) تعيين معادلة ديكاتية لـ (ABC).

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

$M \in (ABC)$ يعني : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$$2(x-2)-3(y-1)+1(z-3) = 0$$

$$(ABC): 2x-3y+z-4 = 0$$

3/ أ/ إحداثيات H :

$$2(2t-7)-3(-3t)+t+4-4 = 0$$

$4t-14+9t+t=0$ نجد $t=1$

$H(-5,-3,5)$

لتكن G مرجع الجملة

$$\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$$

نسمة النجاح djelfa.info

$$x_G=\frac{-2(2)-1(-3)+2(3)}{-2-1+2}=-5$$

$$y_G=\frac{-2(1)-1(-1)+2(2)}{-1}=-3$$

$$z_G=\frac{-2(3)-1(7)+2(4)}{-1}=5$$

$G(-5,-3,5)$

إذن H هي مرجع الجملة

$$\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$$

ب/ $\left|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{29}$ يكافئ $\left\|-\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{29}$

أي $MH=\sqrt{29}$

مجموعة النقط عبارة عن سطح الكرة التي مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{29}$

جـ) $IH=\sqrt{(-5+8)^2+(-3-1)^2+(5-3)^2}==\sqrt{29}$

إذن I تنتمي إلى (Γ).

التمرين الرابع :

I/1/ دراسة تغيرات g.

g تقبل الاشتقاق على $\Re$ ، $g'(x)=2e^x+2$

$g'(x)\rangle 0$ أي g متزايدة تمامًا على $\Re$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ لأن $e^x\to 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ لأن $e^x\to+\infty$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2/ g مستمرة ومتزايدة تمامًا على المجال $[0,94,0,941]$ وَ $g(0,94)\times g(0,941)\langle 0$

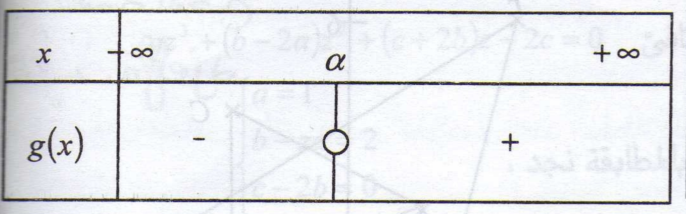
$g(0,94)\cong-3,7\times10^{-5},\ g(0,941)\cong 7,1\times10^{-3}$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيدة α

حيث $0,94\langle\alpha\langle 0,941$

3) إشارة $g(x)$ على $\Re$.

من جدول تغيرات g نجد :



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II/ 1/ دراسة تغيرات f .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-5)(1-e^{-x})=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-5)(1-e^{-x})=+\infty$$

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

f تقبل الاشتقاق على $\Re$:

$$f'(x)=2(1-e^{-x})+(2x-5)e^{-x}$$

$$f'(x)=2+2x\,e^{-x}-7\,e^{-x}$$

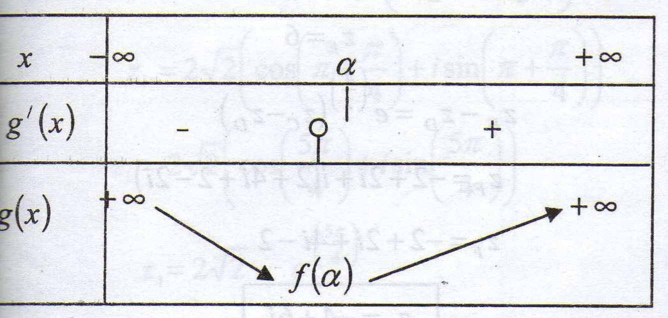
$$f'(x)=(2e^x+2x-7)e^{-x}=g(x).e^{-x}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

f متناقصة تمامًا على $]-\infty,\alpha]$

ومتزايدة تمامًا على $[\alpha,+\infty[$

جدول التغيرات :



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2/ $f(\alpha)=(2\alpha-5)\left(1-e^{-\alpha}\right)$

$g(\alpha)=0$ يكافئ $e^{\alpha}=\dfrac{-(2\alpha-7)}{2}$

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

$$f(\alpha)=(2\alpha-5)\left(\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}}\right)$$

$$f(\alpha)=\frac{(2\alpha-5)\left(\frac{-(2\alpha-7)}{2}-1\right)}{\frac{-(2\alpha-7)}{2}}=\frac{(2\alpha-5)(2\alpha-5)}{2\alpha-7}$$

$$f(\alpha)=\frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$$

h تقبل الاشتقاق على $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$:

$$h'(x)=\frac{2.2(2x-5)(2x-7)-2(2x-5)^2}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x)=\frac{2(2x-5)(4x-14-2x+5)}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x)=\frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$$

من أجل $x<\frac{5}{2}$ يكون $h'(x)>0$

أي h متزايدة تماماً على $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$

استنتاج حصراً لـ $f(\alpha)$

$$h(0,94)<h(\alpha)<h(0,94...)$$

أي $-1,905<f(\alpha)<-1,895$

/3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-5)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)\left(-e^{-x}\right)=0$

إذن المستقيم $(d): y=2x-5$ مقارب مائل للمنحنى (Cf) عند $+\infty$.

وضعية (Cf) بالنسبة لـ (d)

$$f(x)-y=(-2x+5)e^{-x}$$

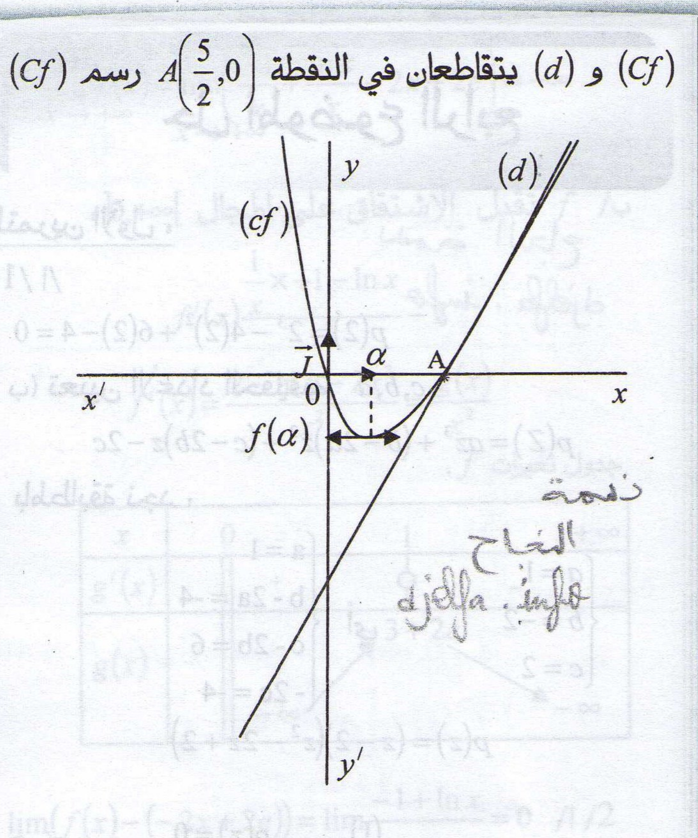
إذا كان $x<\frac{5}{2}$ فإن $f(x)-y>0$ ومنه (Cf) يقع فوق (d)

على المجال $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$

إذا كان $x>\frac{5}{2}$ فإن $f(x)-y<0$ ومنه (Cf) يقع تحت

(d) على المجال $\left]\frac{5}{2},+\infty\right[$

(Cf) و (d) يتقاطعان في النقطة $A\left(\frac{5}{2},0\right)$ رسم (Cf)



/4 حساب المساحة A

$$A=\int_0^{\frac{5}{2}}-f(x)dx=\int_0^{\frac{5}{2}}\left(-2x+5+2x\,e^{-x}-5\,e^{-x}\right)dx$$

بوضع :

$$\begin{cases}u(x)=2x\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases} \quad ، \quad \begin{cases}u'(x)=2\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}}2x\,e^{-x}dx=\left[-2x\,e^{-x}\right]_0^{\frac{5}{2}}+\int_0^{\frac{5}{2}}2\,e^{-x}dx$$

$$=-5e^{-\frac{5}{2}}+\left[-2\,e^{-x}\right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$=-5\,e^{-\frac{5}{2}}-2e^{-\frac{5}{2}}+2$$

$$=-7\,e^{-\frac{5}{2}}+2$$

$$A=\left[-x^2+5x+5e^{-x}\right]_0^{\frac{5}{2}}-7e^{-\frac{5}{2}}+2$$

$$A=-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}+5e^{-\frac{5}{2}}-5-7e^{-\frac{5}{2}}+2$$

$$A=\frac{13}{4}-2e^{-\frac{5}{2}}\ u.a$$

$$\boxed{A=13-8e^{-\frac{5}{2}}cm^2}$$

حل الموضوع الرابع

نسمة النجاح
djelfa . info

التمرين الأول :

1/ أ/

$$p(2)=2^3-4(2)^2+6(2)-4=0$$

ب) تعيين الأعداد الحقيقية c,b,a

$$p(Z)=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases}a=1\\ b-2a=-4\\ c-2b=6\\ -2c=-4\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=2\end{cases}$$

$$p(z)=(z-2)(z^2-2z+2)$$

جـ) (I).........$p(z)=0$

(I) يكافئ $\begin{cases}z=2\\ z^2-2z+2=0 \text{.......(II)}\end{cases}$ أو

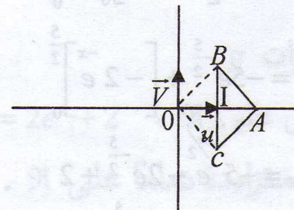
حلول المعادلة (II) :

$$\Delta'=(-1)^2-2-1=i^2$$

$$Z_1=1-i \quad ، \quad Z_2=1+i$$

$$s=\{2,1-i,1+i\}$$

2/أ/ تعليم النقط C,B,A



ب/ $|Z_A|=2$ ، $Arg(z_A)=0$

$|z_C|=\sqrt{2}$ ، $Arg(z_B)=\dfrac{\pi}{4}$

$|z_c|=\sqrt{2}$ ، $Arg(z_C)=\dfrac{-\pi}{4}$

جـ) لدينا : $OC=OB=\sqrt{2}$

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=Arg(z_C)-Arg(z_B)=-\frac{\pi}{2}$$

إذن C هي صورة B بدورات مركزه 0 وزاويته $-\dfrac{\pi}{2}$

د/ $z_I=\dfrac{z_0+z_A}{2}=1$

$$z_j=\frac{z_\beta+z_c}{2}=1$$

هـ/ قطرا علي $OABC$ متناصفان و $OB=OC=\sqrt{2}$

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=-\frac{\pi}{2}$$

إذن الرباعي $OABC$ مربع .

التمرين الثاني :

1/ التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(AB)$ يكافئ $t\in\Re/\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$

يكافئ $\begin{cases}x-1=-2t\\ y+1=2t\\ z-2=-4t\end{cases},t\in\Re$

أي $\begin{cases}x=-2t+1\\ y=2t-1\\ z=-4t+2\end{cases},t\in\Re$

2/أ/ تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P) المستوي (P)

نعتبر $N(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

$N\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{AN}.\vec{n}=0$

أي :

$$-2(x-1)+2(y+1)-4(z-2)=0$$

أي:

$$(P):x-y+2z-6=0$$

ب) $(Q):x-y+2z+6=0$

$$-1-1-4+6=-6+6=0$$

ومنه : $\beta\in(Q)$

الشعاع الناظمي لـ (Q) $\vec{n}'(1,-1,2)$ مرتبط خطيا مع

لأن : $\vec{n}=-2\vec{n}'$

إذن (Q) يوازي (P)

3/أ/بيان أن $\overrightarrow{IB}$و$\overrightarrow{IA}$ مرتبطان خطيًا: بما أن $\vec{n}$ و $\vec{n}'$

مرتبطان خطيا و $\overrightarrow{IA}$ يعامد $\vec{n}$ فإن $\overrightarrow{IA}$ يعامد $\vec{n}'$.

أي : $\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطان خطيا .

ب/ برهان أن : $IB^2-IA^2=12$

لتكن K نقطة تقاطع (C) و (S)

المثلث IAK قائم في A

حسب مبرهنة فيتاغورس :

$$IK^2 = IA^2 + AK^2 = IA^2 + 12$$

ولدينا : $IK = IB$

إذن : $IB^2 - IA^2 = 12$

التمرين الثالث :

1) $y' - 2y = 4x$

من أجل $y = -e^{2x} + 2x + 1$

$$y' - 2y = -2e^{2x} + 2 + 2e^{2x} - 4x - 2 = -4x$$

و $0 = -e^{2(0)} + 2(0) + 1$

إذن ج$_1$) هو الجواب الصحيح

2) $$\lim_{x \to +\infty}\left(e^{2x} - x^2 - 3x + 2\right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{x^2}{e^{2x}} - \frac{3x}{e^{2x}} + \frac{2}{e^{2x}}\right) = +\infty$$

إذن ج$_2$) هو الجواب الصحيح

3/ بما أن : $1 - 2 + 3 = 2 \neq 0$

فإن ج$_2$) هو الجواب الصحيح .

التمرين الرابع :

I/1/ دراسة تغيرات g :

$\lim_{x \to 0^{>}} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \to 0^{>}} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

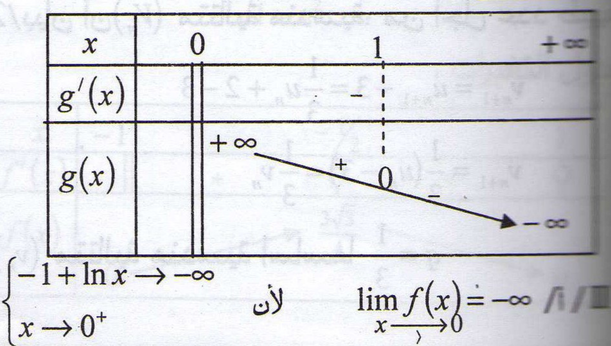
g تقبل الاشتقاق على $]0,+\infty[$ ،

$$g'(x) = -4x - \frac{1}{x}$$

$g'(x) \langle 0$ لأن $x \rangle 0$.

g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

جدول التغيرات :



x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘ $+$	0	$-$ ↘	$-\infty$

II/1/ $\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$ لأن $\begin{cases} -1 + \ln x \to -\infty \\ x \to 0^+ \end{cases}$

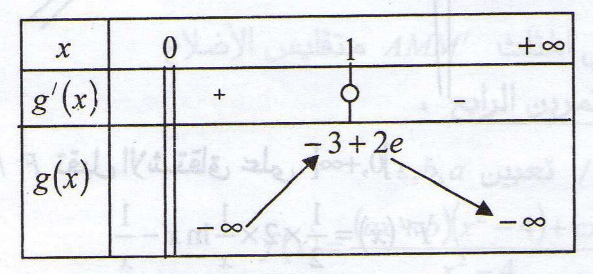
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 2x + 2e\right) = -\infty$$

ب/ f تقبل الاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x + 1 - \ln x}{x^2} - 2$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات f :



x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0		
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-3+2e$	↘	$-\infty$

2/ أ/ $$\lim_{x \to +\infty}\left(f(x) - (-2x + 2e)\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1 + \ln x}{x} = 0$$

إذن $(D): y = -2x + 2e$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (c) عند $+\infty$.

ب/ وضعية (C) بالنسبة (D)

إشارة $f(x) - y$ هي إشارة $-1 + \ln x$

x	0		e		$+\infty$
$f(x) - y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية	‖	(C) تحت (D)		(C) فوق (D)	

(C) و (D) يتقطعان في $A(e,0)$

3/ f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,1]$

f تغير من إشارتها على المجال $]0,1]$ ،

$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$ وَ $f(1) \rangle 0$

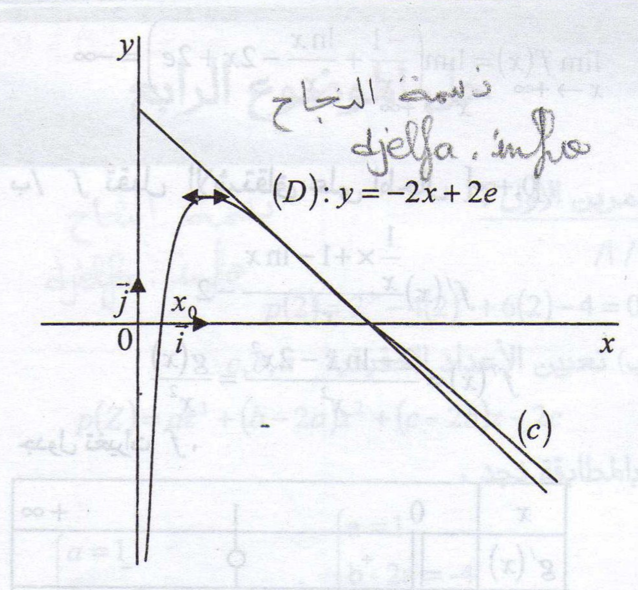
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حل وحيد x_0 حيث $x_0 \in]0,1]$

$x_0 \in]0{,}4;0{,}5[$ لأن ؛ $f(0{,}4).f(0{,}5) \langle 0$

$f(0{,}4) \cong -0{,}15$ وَ $f(0{,}5) \cong 1{,}05$

4/ إنشاء (D) و (C)



III/ 1/ F تقبل الاشتقاق على $]0,+\infty[$:

$$F'(x)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}$$

$$F'(x)=\frac{-1+\ln x}{x}=h(x)$$

$$F(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

إذن F هي الدالة الأصلية لـ h والتي تنعدم عند

$x=1$

/2 $F(\alpha)=\frac{3}{2}$ يكافئ $\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2-\ln\alpha=\frac{3}{2}$

يكافئ $(\ln\alpha)^2-2\ln\alpha-3=0$

يكافئ $\begin{cases} y^2-2y-3=0....(1) \\ y=\ln\alpha \end{cases}$

حل المعادلة (1) :

$\Delta'=3$ ، $y'=-1$ ، $y''=3$

$\ln\alpha=-1$ يكافئ $\alpha=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$\ln\alpha=3$ يكافئ $\alpha=e^{3}$

قيم α هما $\frac{1}{e}$ و e^3.

حل الموضوع الخامس

التمرين الأول :

/1 $p(D_1)=\frac{1}{6}$ ، $p(D_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ، $p(D_3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$$P_{D_1}(G)=\frac{C_4^1}{C_{10}^1}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$P_{D_2}(G)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$$

$$P_{D_3}(G)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$$

/2 $P(D_1\cap G)=P(D_1)\times P_{D_1}(G)$

$$P(D_1\cap G)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$$

/3 إثبات أن : $p(G)=\frac{23}{180}$

لدينا :

$$G=(D_1\cap G)\cup(D_2\cap G)\cup(D_3\cap G)$$

$$P(G)=P(D_1\cap G)+P(D_2 x)+p(D_3\cap G)$$

لأن الحوادث $D_1\cap G$ ، $D_2\cap G$ ، $D_3\cap G$ مستقلة مثنى مثنى

$$P(D_2\cap G)=P(D_2)\times P_{D_2}(G)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{15}=\frac{3}{45}$$

$$P(D_3\cap G)=P(D_3)\times P_{D_3}(G)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{30}=\frac{1}{60}$$

$$p(G)=\frac{1}{15}+\frac{3}{45}+\frac{1}{60}=\frac{23}{180}$$

/4 إحتمال ظهور الرقم 1 علما أن اللاعب ربح :

$$p_G(D_1)=\frac{p(G\cap D_1)}{P(G)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{23}{180}}=\frac{12}{23}$$

التمرين الثاني :

/1 $u_1=\frac{1}{3}(u_0)+2=\frac{9}{3}+2=5$

$$u_2=\frac{1}{3}(u_1)+2=\frac{5}{3}+2=\frac{11}{3}$$

$$v_0=u_0-3=9-3=6$$

$$v_1=u_1-3=5-3=2$$

$$v_2=u_2-3=\frac{11}{3}-3=\frac{2}{3}$$

/2 بيان أن (V_n) متتالية هندسية، من أجل عدد طبيعي

$$v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-3)=\frac{1}{3}v_n$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

... الأول $v_0 = 6$

... عبارتي v_n و u_n بدلالة n.

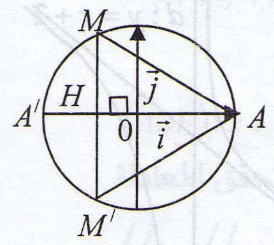
$$v_n = v_0 \times q^n \quad ، \quad v_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_n = v_n + 3 \quad ، \quad u_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$ لأن $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$.

... التمرين الثالث :

... لتكن $A(x)$ مساحة المثلث AMM'



$$A(x) = \frac{1}{2} MM' \times HA$$

$$A(x) = MH \times AH$$

$$AH = 1 - x$$

... المثلث OMH قائم في H.

... حسب مبرهنة فيثاغورس فإن :

$$OM^2 = OH^2 + M...$$

$$MH^2 = OM^2 - OH^2 = 1 - ...$$

$$MH = \sqrt{1-x^2}$$

$$A(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

... دراسة تغيرات f .

... تقبل الاشتقاق على المجال $]-1,1[$:

$$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x)(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

... جدول التغيرات :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	||	+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

ب/ من أجل $x = -\frac{1}{2}$ تكون مساحة المثلث AMM' أكبر ما يمكن ولدينا :

$$MM' = 2MH = 2\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$MA^2 = MH^2 + AH^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3$$

أي : $MA = \sqrt{3}$

وكذلك : $M'A = \sqrt{3}$

أي المثلث AMM' متقايس الأضلاع

التمرين الرابع :

1/ تعيين c, b, a :

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2-4)+cx}{x^2-4}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + (a+c)x - 4b}{x^2-4}$$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ a + c = 0 \\ -4b = -8 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{x}{x^2-4}$$

2/ بيان أن (c) يقبل مستقيم مقارب مائل:

$$\lim_{|x| \to +\infty}[f(x) - (x+2)] = \lim_{|x| \to +\infty}\left(\frac{-x}{x^2-4}\right) = 0$$

إذن (C) يقبل مستقيم متقارب مائل (d) معادلته :

$$y = x + 2$$

3/ دراسة الوضع النسبي لـ (c) و(d) $\quad f(x) - y = \frac{-x}{x^2-4}$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$-x$	+	||	+	0	−	||	+
x^2-4	+	0	−		−	0	+
$f(x)-y$	+	||	−	0	+	||	−
الوضعية	(c) فوق (d)		(c) تحت (d)		(c) فوق (d)		(c) تحت (d)

(C) و (d) يتقطعان في $A(0,2)$

4/ دراسة تغيرات الدالة f.

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x)=+\infty$$ لأن $$\begin{cases}-x\to 2\\ x^2-4\to 0^+\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=+\infty$$ لأن $$\begin{cases}-x\to -2\\ x^2-4\to 0^-\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=-\infty$$

اتجاه التغير: f تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty,-2[$ ، $]-2,2[$ ، $]2,+\infty[$:

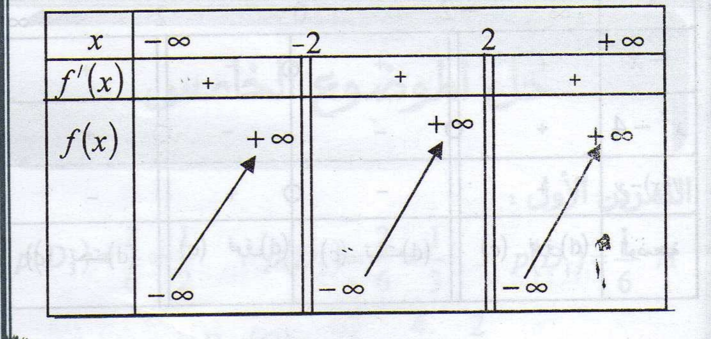
$$f'(x)=1+\frac{-1(x^2-4)-2x(-x)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=1+\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=1+\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x)\rangle 0$ ومنه f متزايدة تماما على المجالات $]-\infty,-2[$ ، $]-2,2[$ ، $]2,+\infty[$

جدول التغيرات :



x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$	‖ $-\infty$ ↗		$+\infty$

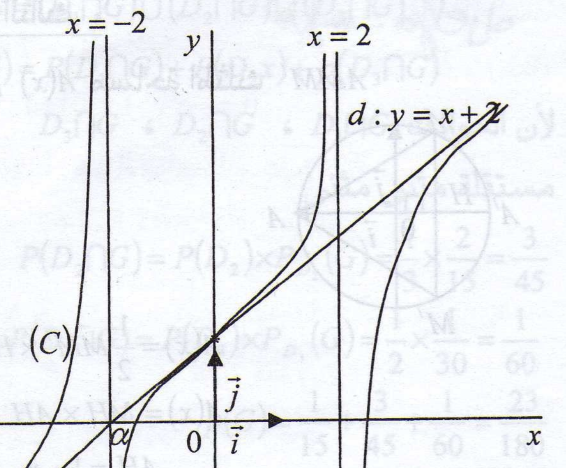
5/ f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$ وَ

$$f\left(\frac{-3}{2}\right)\times f(-1)\langle 0$$

حيث : $f(-1)\cong 0,67$ وَ $f\left(\frac{-3}{2}\right)\cong -0,36$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α حيث $\alpha\in\left]\frac{-3}{2},-1\right[$

7/ ارسم المنحنى (C)



حل الموضوع السادس

التمرين الأول :

1/ التمثيل الوسيطي لـ (D).

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(D)$ يعني $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}\ /\ t\in\Re$

أي $$\begin{cases}x=2\\ y=t, t\in\Re\\ z=t\end{cases}$$

التمثيل الوسيطي لِـ (Δ)

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)[4x^2-(1+x^2)]}{4x^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)(3x^2-1)}{4x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $3x^2-1$.

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

من أجل $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ أي $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$ تكون مساحة المثلث OAB أصغر ما يمكن .

التمرين الرابع :

I /1/ دراسة تغيرات الدالة g.

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-4$ لأن $\begin{cases} e^x\to 0 \\ xe^x\to 0\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left[4-2x-\frac{4}{e^x}\right]=-\infty$$

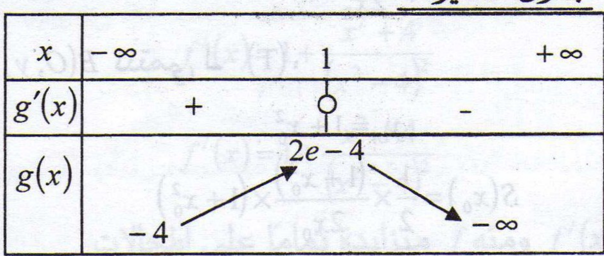
g تقبل الاشتقاق على $\Re$

$$g'(x)=4e^x-2e^x-2xe^x$$

$$g'(x)=2e^x(1-x)$$

إشارة $g'(x)$ هي من إشارة $1-x$.

جدول التغيرات :



x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	↗	$2e-4$	↘	$-\infty$

2/ لدينا : $g(0)=0$

g مستمرة ومتناقصة تمامًا على المجال $]1{,}59;1{,}6[$ و $g(1{,}59)\times g(1{,}6)<0$

حيث : $g(1{,}59)=0{,}02$ و $g(1{,}6)=-0{,}04$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1{,}59<\alpha<1{,}6$

3 / إشارة $g(x)$ على $\Re$

من جدول التغيرات نجد :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II /1/ دراسة تغيرات f .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{2x\left(\frac{e^x}{2x}-1\right)}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

f تقبل الاشتقاق على $\Re$

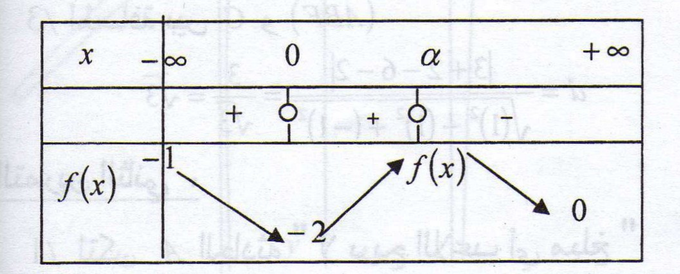
$$f'(x)=\frac{2(e^x-2x)-(e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x-4x-2xe^x+2e^x+4x-4}{(e^x-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4e^x-2xe^x-4}{(e^x-2x)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

جدول التغيرات



x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	$f(x)$	↘	0

2/ بيان أن $f(x)=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}$

لدينا : $f(\alpha)=\frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha}$

$g(\alpha)=0$ يكافئ $4e^\alpha-2\alpha e^\alpha-4=0$

يكافئ $e^\alpha(2-\alpha)=2$

أي $e^\alpha=\frac{2}{2-\alpha}$

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha-2}{\frac{2}{2-\alpha}-2\alpha}=\frac{2\alpha-2}{\frac{2-4\alpha+2\alpha^2}{2-\alpha}}$$

$$f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{\alpha^2-2\alpha+1}=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}$$

أي $f(\alpha)=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$

استنتاج حصرًا لـ $f(\alpha)$

الدالة h / $h(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$ تقبل الاشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ ولدينا : $h'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

$h'(x)\langle 0$ ومنه h متناقصة تمامًا على المجال $]1,+\infty[$

وكذلك على المجال $]1{,}59;1{,}6[$

وعليه فإن :

$$0{,}67\langle f(\alpha)\langle 0{,}69$$

/3 $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x)=-1$ ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب يوازي (xx') عند $-\infty$ معادلته $y=-1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ عند $+\infty$ وضعية (C) بالنسبة لـ $(d): y=-1$

$$f(x)-y=\frac{2x-2}{e^x-2x}+1=\frac{e^x-2}{e^x-2x}$$

لما $x\in]-\infty,0[\cup]0,\ln 2[$ فإن (C) يقع تحت (d)

لما $x\in]\ln 2,+\infty[$ فإن (C) يقع فوق (d)

(C) و (d) يتقاطعان في النقطة $A(\ln 2,-1)$

وضعية (C) بالنسبة لـ (xx') :

إشارة $f(x)$ هي إشارة البسط $2x-2$:

(c) يقع فوق محور الفواصل إذا كان :

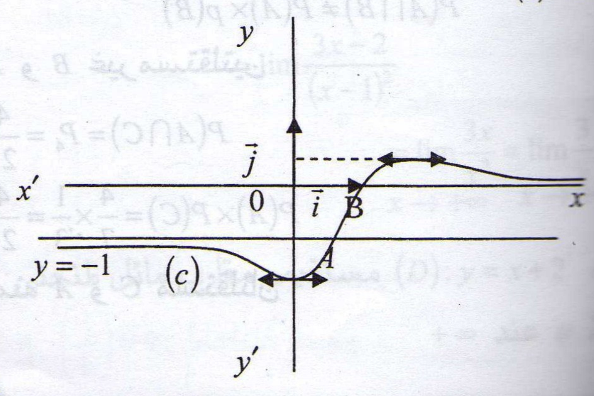
x من $]0,+\infty[$

(c) يقع تحت محور الفواصل إذا كان :

x من $]-\infty,0[$

(c) يقطع (xx') في النقطة $\beta(1,0)$

إنشاء (c)



حل الموضوع السابع

التمرين الأول :

1/ لتكن $p(n)$ الخاصية : $-1\le U_n\le 0$

من أجل $n=0$ ، $u_0=0$ و $-1\le u_0\le 0$

صحيحة ومنه $p(0)$ صحيحة .

نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي :

$-1\le u_n\le 0$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $-1\le u_{n+1}\le 0$

لدينا : $-1\le u_n\le 0$ ومنه

$$2\le u_n+3\le 3$$

$$\frac{1}{3}\le\frac{1}{u_n+3}\le\frac{1}{2}$$

$$-2\le\frac{-4}{u_n+3}\le\frac{-4}{3}$$

$$-1\le 1-\frac{4}{u_n+3}\le 1-\frac{4}{3}$$

$$-1\le u_{n+1}\le -\frac{1}{3}$$

بما أن $-\frac{1}{3}\langle 0$ فإن : $-1\le u_{n+1}\le 0$

$p(n+1)$ صحيحة وعليه فإن : $-1\le u_n\le 0$

من أجل كل عدد طبيعي n.

2/ رتابة المتتالية (U_n).

من أجل كل عدد طبيعي n.

$$U_{n+1}-U_n=1-\frac{4}{U_n+3}-U_n$$

$$=\frac{U_n+3-4-U_n^2-3U_n}{U_n+3}$$

$$=\frac{-(U_n+1)^2}{U_n+3}$$

$U_{n+1}-U_n\le 0$ ومنه (U_n) متناقصة على $\mathfrak{R}$.

الإستنتاج :

(U_n) متناقصة وَ محدودة من الأسفل بـ -1

فهي

3/أ/ بيان أن (V_n) حسابية :

من أجل عدد طبيعي n :

$$V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}+1}=\frac{1}{-1\frac{4}{u_n+3}+1}$$

$$V_{n+1}=\frac{u_n+3}{2U_n+2}=\frac{U_n+1+2}{2(U_n+1)}$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{u_n+1}=V_n+\frac{1}{2}$$

(V_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدّها الأول V_0 :

$$V_0=\frac{1}{u_0+1}=1$$

ب) عبارتي V_n و U_n بدلالة n :

$$V_n=\frac{1}{2}n+1$$

$V_n=\frac{1}{u_n+1}$ يكافئ $U_n=\frac{1}{V_n}-1$

$$U_n=\frac{1}{\frac{1}{2}n+1}-1=\frac{-n}{n+2}$$

جـ/ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{n}=-1$

4/ $S_n=\frac{1}{n^2}\left[\frac{n+1}{2}(V_0+V_n)\right]$

$$S_n=\frac{n+1}{2n^2}\left[1+1+\frac{1}{2}n\right]$$

$$\boxed{S_n=\frac{(n+1)(n+4)}{4n^2}}$$

$$S_n-\frac{1}{4}=\frac{(n+1)(n+4)}{4n^2}-\frac{n^2}{4n^2}$$

$$S_n-\frac{1}{4}=\frac{5n+4}{4n^2}$$

لدينا : $5n+4\le 12n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

$$\left|S_n-\frac{1}{4}\right|\le\frac{12n}{4n^2}$$

أي $\left|S_n-\frac{1}{4}\right|\le\frac{3}{n}$

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ وعليه فإن :

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{4}$$

التمرين الثاني :

1/ تعيين قانون الاحتمال :

$$\frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{2}=\frac{p_3}{3}=\frac{p_4}{4}=\frac{p_5}{5}=\frac{p_6}{6}=$$

$$=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6}{1+2+3+4+5+6}=\frac{1}{21}$$

نجد :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

/2 $P(A)=p_2+p_4+p_6=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

$$p(B)=p_3+p_4+p_5+p_6=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$$

$$p(C)=p_3+p_4=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$$

ب) $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{10}{21}}{\frac{12}{21}}$

$$p_A(B)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

3) $p(A\cap B)=\frac{10}{21}$

$$p(A)\times P(B)=\frac{4}{7}\times\frac{6}{7}=\frac{24}{49}$$

$$P(A\cap B)\neq P(A)\times p(B)$$

A و B غير مستقلتين

$$P(A\cap C)=P_4=\frac{4}{21}$$

$$P(A)\times P(C)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{21}$$

ومنه A و C مستقلتان

التمرين الثالث :

/1 حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x3}{x2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x3}{x2}=+\infty$$

$\lim_{x\to1}\varphi(-x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}(x-1)^2\to0^+\\ \left|x^3\right|\to1\end{cases}$

/2 قابلة إشتقاق φ عند الصفر :

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\frac{-x^3}{(x-1)^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-x^2}{(x-1)^2}=0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2}{(x-1)^2}=0$$

ومنه φ تقبل الإشتقاق عند 0.

/3 من أجل $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$:

$$\varphi'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-2x(x-1)x^3}{(x-1)^4}$$

$$\varphi'(x)=\frac{3x^3-3x^2-2x^4}{(x-1)^3}=\frac{x^2\left(2x^2-3x-3\right)}{(x-1)^3}$$

/4

$$\lim_{x\to+\infty}(\varphi(x)-y)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-(x+2)\right]$$

$$=\lim\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$$

ومنه $(D):y=x+2$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة φ عند $+\infty$

$\varphi(x)-(x+2)\le\frac{1}{10^n}$ يعني $\frac{3x-2}{(x-1)^2}\le\frac{1}{10^n}$

من أجل $x\ge n$ يكون $3x-2\le4x-4$ لأن ؛ $x-2\ge0$

حيث $n\rangle1$.

ومنه ؛ $\frac{3x-2}{(x-1)^2}\le\frac{1}{10^n}$ يكافئ $\frac{4(x-1)}{(x-1)^2}\le\frac{1}{10^n}$

يكافئ $x-1\ge4\times10^n$

يكافئ $x\ge1+4\times10^n$

من أجل $n=2$ يكون $x\ge401$

إذن أول عدد طبيعي هو $n=401$

التمرين الرابع :

1 /أ/ f تقبل الإشتقاق على I:

$$f'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$$

f' تقبل الإشتقاق على I ؛

$$f''(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}$$

ب) من أجل كل x من I ؛ $f''(x)\rangle0$

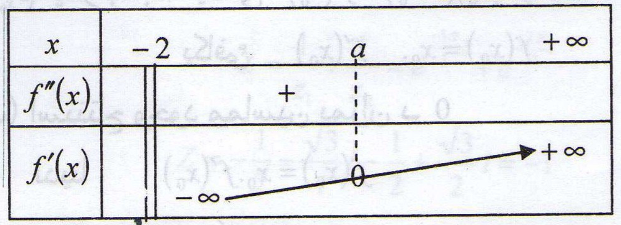
f' مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0{,}6;-0{,}5]$

حيث ؛ $f'(-0{,}6)\times f'(-0{,}5)\langle0$

$f'(-0{,}6)\cong-0{,}09$ و $f'(-0{,}5)\cong0{,}072$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد a من المجال $[-0{,}6,-0{,}5]$ بحيث ؛ $f'(a)=0$

/2 دراسة تغيرات f'.



x	-2	a	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات f' نستنتج جدول إشارة $f'(x)$ التالي:

x	-2		a		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

f متناقصة تماما على المجال $]-2,a]$

ومتزايدة تماما على المجال $[a,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ وَ $\lim_{x\xrightarrow{>}-2}f(x)=+\infty$

جدول تغيرات f

x	-2 a $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $f(a)$ ↗ $+\infty$

3) بيان أن $f(a)=\frac{a+2-a^2}{a+2}$

$f(a)=1+a\ln(a+2)$

لدينا $f'(a)=0$ ومنه:

$$\ln(a+2)=-\frac{a}{a+2}$$

$$f(a)=1-\frac{a^2}{a+2}=\frac{a+2-a^2}{a+2}$$

إستنتاج حصرًا لـ $f(a)$:

لدينا: $1,4\le a+2\le 1,5$

$$-0,36\le -a^2\le -0,25$$

$$1,04\le a+2-a^2\le 1,25$$

$$\frac{1,04}{1,5}\le \frac{a+2-a^2}{a+2}\le \frac{1,25}{1,4}$$

$$0,69\le f(a)\le 0,89$$

4/ أ) معادلة المماس:

$$(T_{x0}): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

(T_{x_0}) يمر بالمبدأ يكافئ $0=f'(x_0)(-x_0)+f(x_0)$

يكافئ $f(x_0)=x_0.\ f'(x_0)$

ب) استنتاج وجود مماسين يمران ب 0

لدينا: $f(x_0)=x_0\cdot f'(x_0)$

$$1+x_0\ln(x_0+2)=x_0\left(\ln(x_0+2)+\frac{x_0}{x_0+2}\right)$$

$\frac{x_0^2}{x_0+2}=1$ نجد $x_0^2-x_0-2=0$

$\Delta=9$ ، $x_0'=-1$ ، $x_0''=2$

المماس الأول:

$$(T_a): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$

$$y=-1(x+1)+1$$

$$(T_a): y=-x$$

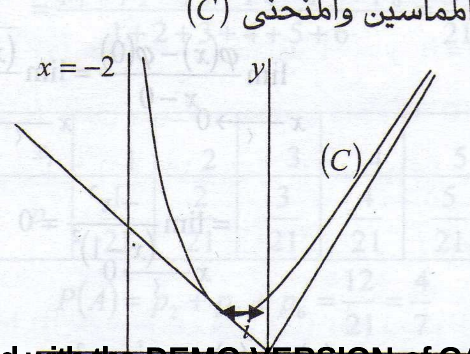
المماس الثاني:

$$(T_b): y=f'(2)(x-2)+f'(2)$$

$$y=\left(\frac{1}{2}+2\ln 2\right)(x-2)+1+4\ln 2$$

$$y=\frac{1}{2}(1+4\ln 2)x$$

5/ رسم المماسين والمنحنى (C)



حل الموضوع الثامن

التمرين الأول:

/1 $2x^2+x-10=0$

$\Delta=81$ ، $x_1=\frac{-1-9}{4}=-\frac{5}{2}$

$x_2=\frac{-1+9}{4}=2$

$$S=\left\{-\frac{5}{2},2\right\}$$

/2 حل المعادلة (a):

نضع $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ المعادلة تصبح:

$$2y^2+y-10=0$$

ومنه :

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{4}\right)^x=-\frac{5}{2}.......(1)\\ \left(\frac{1}{4}\right)^x=2..........(2)\end{cases}$$

المعادلة (1) لا تقبل حلول في $\Re$.

(2) يكافئ $x\ln\left(\frac{1}{4}\right)=\ln 2$

يكافئ $-2x\ln 2=\ln 2$

يكافئ $x=-\frac{1}{2}$

حل المعادلة (b)

$$(b): e^x\times e^{-1}-10e^{-1}=3\left(e^x\right)^2\times e^{-1}$$

$$(b): 3\left(e^x\right)^2+e^x-10=0$$

$$\begin{cases}e^x=-\frac{5}{4} & \text{لا تقبل حل}\\ e^x=2\end{cases}$$

نجد

حل المعادلة (C):

اذا كان $x>-1$ فإن :

$$(C): \ln(x+1)(3x-2)=\ln 2^2$$

$$(C): 3x^2+x-2=8$$

$$(C): 3x^2+x-10=0$$

$$\begin{cases}x=-\frac{5}{2} & \text{مرفوض}\\ x=2 & \text{مقبول}\end{cases}$$

اذن $S=\{2\}$

التمرين الثاني :

/1 a/ بيان أن $V_n\geq 0$.

لدينا: $e^n+2^n\geq 0$ لكل $n\geq 1$

$e^n-2^n\geq 0$ لكل $n\geq 0$

لأن $e>2$ ومنه $V_n\geq 0$

b) من أجل عدد طبيعي n:

$$V_{n+1}-V_n=\frac{e^{n+1}+2^{n+1}}{e^{n+1}-2^{n+1}}-\frac{e^n+2^n}{e^n-2^n}$$

$$=\frac{2^{n+1}\times e^n(2-e)}{\left(e^{n+1}-2^{n+1}\right)\left(e^n-2^n\right)}$$

لدينا $2-e<0$ ومنه $V_{n+1}-V_n<0$

(V_n) متناقصة تماما .

c) (V_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة .

2) تحديد نهاية المتتالية (V_n)

$$\lim_{x\to+\infty}V_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}{e^n\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}=1$$

لأن $\left(\frac{2}{e}\right)^n\to 0$

التمرين الثالث :

/1 $z^2+z+1=0$

$\Delta=-3=3i^2$

$z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\lvert z_1\rvert=1$ ،	$Arg(z_1)=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$
$\lvert z_2\rvert=1$ ،	$Arg(z_2)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

/2 تحديد الأعداد Z'',Z',Z

$$Z=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=e^{\frac{-4\pi}{3}i}+e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$$Z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{i}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-1$$

$$Z'=z_1^2+z_1z_2+z_2^2=e^{8\frac{\pi}{3}i}+e^{2\pi i}+e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$Z'=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\boxed{Z'=0}$$

$$Z''=e^{4\pi i}+e^{2\pi i}=1+1=2$$

3/ تحليل كثير الحدود $p(z)$

$$p(z)=(z-1)(z^2+z+1)$$

إستنتاج قيمة Z''

$$Z''=z_1^3+z_2^3=(z_1+z_2)(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)$$

$$Z''=(z_1+z_2)\left[(z_1+z_2)^2 zz_1-z_2\right]$$

$$Z''=\left(\frac{-b}{a}\right)\left[\left(\frac{-b}{a}\right)^2-3\frac{c}{a}\right]$$

$$Z''=(-1)[1-3]=2$$

$$\boxed{Z''=2}$$

التمرين الرابع :

1/ دراسة تغيرات f :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3)}{x+3}=0$$

f تقبل الإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة البسط .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$ ↘	0

أ/2 بما أن f متناقصة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه من أجل $n\le x\le n+1$

يكون : $f(n+1)\le f(x)\le f(n)$

ب) من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx\le\int_n^{n+1} f(x)dx\le\int_n^{n+1} f(n)dx$$

ومنه : $f(n+1)\le u_n\le f(n)$

جـ) إستنتاج أن (u_n) متقاربة

لدينا : (u_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة .

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} f(n+1)=\lim_{n\to+\infty} f(n)=0$

حسب مبرهنة الحصر فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=0$$

3) أ) $g'(x)=2\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

$$I_n=\int_0^n f(x)dx=\int_0^n\frac{1}{2}g'(x)dx$$

$$I_n=\left[\frac{1}{2}(\ln(x+3))^2\right]_0^n$$

$$I_n=\frac{1}{2}[\ln(n+3)]^2-\frac{1}{2}(\ln(3))^2$$

ب) حساب S_n بدلالة n :

$$S_n=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\dots\dots+\int_{n-1}^n f(x)dx$$

$$S_n=\int_0^n f(x)dx=\frac{1}{2}\left[(\ln(n+3))^2-(\ln 3)^2\right]$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$ ومنه (S_n) متباعدة

حل الموضوع التاسع

التمرين الأول :

1/ لتكن A الحادثة "سحب كرتين رقم كل منهما عدد أولي"

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}\cong 0{,}21$$

2/ β الحادثة "سحب كرتين مجموع رقميهما عدد فردي"

$$P(B)=\frac{C_3^1\times C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}\cong 0{,}54$$

أ/3 مجموعة قيم x :

$$x(\Omega)=\{0,1,3,4\}$$

ب/ قانون احتمال المتغير x.

$$p(x=0)=\frac{C_4^2+C_3^2}{C_8^2}=\frac{9}{28}$$

$$p(x=1)=\frac{C_4^1\times C_3^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}$$

$$p(x=3)=\frac{C_3^1\times C_1^1}{C_8^2}=\frac{3}{28}$$

$$p(x=4)=\frac{C_4^1\times C_1^1}{C_8^2}=\frac{4}{28}$$

x_i	0	1	3	4
p_i	$\frac{9}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

حساب الأمل الرياضي

$$E(x)=\frac{1}{28}[0+12+9+16]=\frac{37}{28}$$

$$E(x)\cong 1{,}32$$

التمرين الثاني :

/1 $z^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{\frac{4-3}{4}}i$

$$\boxed{z^2=-\sqrt{3}+i}$$

$Arg(z^2)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ ، $|z^2|=2$

(2 $|z^2|=2$ ومنه $|z|=\sqrt{2}$

$$2Arg(z)=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\ /\ k\in z$$

$$Arg(z)=\frac{2\pi}{12}+\pi k\ /\ k\in z$$

من أجل $k=0$: $Arg(z)=\frac{5\pi}{12}$

من أجل $k=1$: $Arg(z)=\frac{17\pi}{12}$

عمدة z تقع في الربع الأول

اذن : $Arg(z)=\frac{5\pi}{12}$

3) الإستنتاج :

$$z=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}+\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}i$$

بالمطابقة نجد :

ومنه :
$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\\ \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\end{cases}$$

التمرين الثالث :

/1 أ) بيان أن A لا تنتمي إلى (Δ).

بالتعويض في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) :

$$\begin{cases}0=v-1\\1=v+1\\3=2\end{cases}\quad \text{أي}\quad \begin{cases}v=1\\v=0\\3=2\end{cases}$$

ومنه $A\notin(\Delta)$

ب) تعيين إحداثي B :

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (Q)

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ / $\vec{n}(1,1,0)$

$$1(x-0)+1(y-1)+0(z-3)=0$$

$$(Q): x+y-1=0$$

$v-1+v+1-1=0$ ومنه $\boxed{v=\frac{1}{2}}$

$$B\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},2\right)$$

/2 تعيين التمثيل الوسيطي لـ (π).

$\overrightarrow{BA}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},1\right)$ $\vec{n}(1,1,0)$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\alpha+\beta-\frac{1}{2}\\ y=-\frac{1}{2}\alpha+\beta+\frac{3}{2}\\ z=\alpha+2\end{cases}\quad /\quad (\alpha,\beta)\in\Re^2$$

التمرين الرابع :

/1 f تقبل الإشتقاق على المجالين $]-\infty,1[$ ، $]1,+\infty[$:

$$f'(x)=a-\frac{c}{(x-1)^2}$$

/2أ/ تعيين c,b,a

لدينا :
$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right)=0 \\ f\left(\frac{3}{2}\right)=3 \end{cases}$$

نسمة النجاح djelfa.info

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ يكافئ $a-\dfrac{c}{\frac{1}{4}}=0$

يكافئ $a=4c$

$f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ يكافئ $a-\dfrac{c}{\frac{1}{4}}=0$

أي $a=4c$......(5)

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ يكافئ $\frac{1}{2}a+b-2c=1$

يكافئ $a+2b-4c=2$......(6)

$f\left(\frac{3}{2}\right)=3$ يكافئ $\frac{3}{2}a+b+2c=3$

يكافئ $3a+2b+4c=6$......(7)

بتعويض (5) في (6) نجد :

$2b=2$ أي $\boxed{b=1}$

بالتعويض قيمة b في (6) و (7) ثم بالجمع طرفًا لطرف نجد : $4a+4=8$

أي $\boxed{a=1}$

نعوض في (5) نجد $\boxed{C=\frac{1}{4}}$

$$f(x)=x+1+\frac{1}{4(x-1)}$$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)=-\infty$

التفسير المنحنى (C) يقبل مسقيم مقارب عمودي معادلته $x=1$.

جـ) $f\left(\frac{1}{2}\right) \rangle f\left(\frac{3}{4}\right)$ لأن f متناقصة تمامًا على المجال $\left[\frac{1}{2},1\right[$

/3 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{1}{4(x-1)}=0$

إذن (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x+1$.

ب) وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$		$+$
الوضعية	(C) تحت(Δ)		(C) فوق(Δ)

جـ) إثبات أن : $w(1,2)$ مركز تناظر من أجل كل $x\in\Re-\{1\}$ ، $2-x\in\Re-\{1\}$

$$f(2-x)+f(x)=2-x+1+\frac{1}{4(1-x)}+x+1+\frac{1}{4(x-1)}$$
$$=4=2(2)$$

ومنه ω مركز تناظر لـ (C)

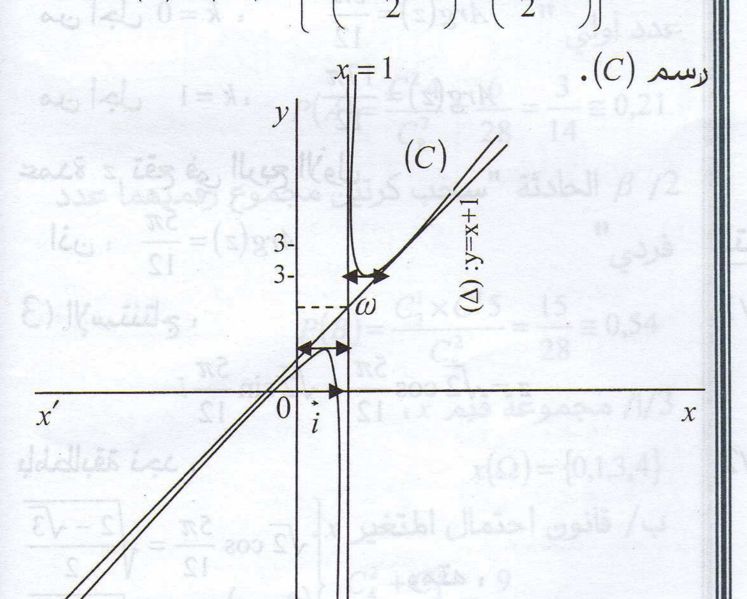
د) نقط تقاطع (C) مع (xx').

$$f(x)=\frac{4x^2-3}{4(x-1)}$$

$y=0$ يكافئ $\left(x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $\left(x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$(C)\cap(xx')=\left\{A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\right\}$$

رسم (C).



4/ مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=|v|$ حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم الذي معادلته $y=|v|$.

- إذا كان $|v|<1$ أو $|v|>3$ أي: $v\in]-\infty,-3[\cup]-1,1[\cup]3,+\infty[$

يوجد حلان متمايزان.

- إذا كان $|v|=1$ أو $|v|=3$ أي. $v\in\{-3,-1,1,3\}$ يوجد حل مضاعف

إذا كان $1<|v|<3$ أي $v\in]-3,-1[\cup]1,3[$

لا يوجد حلول.

حل الموضوع العاشر

التمرين الأول:

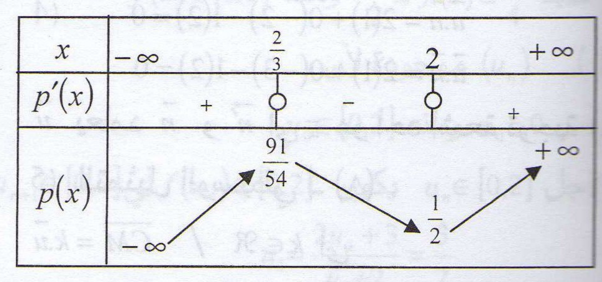
1/ P تقبل الإشتقاق على $\Re$:

$$P'(x)=3x^2-8x+4$$

$$3x^2-8x+4=0$$

$$\Delta'=(-4)^2-(3)(4)=4$$

$$x''=2 \quad ، \quad x'=\frac{2}{3}$$



x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$p'(x)$		+	0	−	0	+	
$p(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{91}{54}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

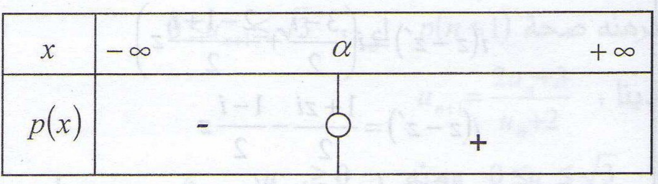
P/2 مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2},0\right[$

و $p\left(-\frac{1}{2}\right)\times p(0)<0$

حيث $p\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{21}{8}$ و $p(0)=\frac{1}{2}$

المعادلة $p(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α في المجال $\left]-\frac{1}{2},0\right[$.

3) إشارة p(x) على $\Re$



x	$-\infty$		α		$+\infty$
$p(x)$		−	0	+	

4/ G تقبل الإشتقاق على $\Re$:

$$G'(x)=x^3-4x^2+4x+\frac{1}{2}=p(x)$$

G متزايدة تماما على المجال $]\alpha,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty,\alpha]$

التمرين الثاني:

1/أ/ العبارة المركبة لـ s هي:

$$z'=az+b$$

$$a=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_0}=\frac{-4-i+1+4i}{-1-4i-5+4i}$$

$$a=\frac{-3+3i}{-6}=\frac{1-i}{2}$$

$a\neq 0$ ومنه s موجود.

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

[illegible] $\frac{1-i}{2}$

$$b=z_1-\frac{1-i}{2}z_0=\frac{-3+i}{2}$$

إذن: $z'=\frac{1-i}{2}z+\frac{-3+i}{2}$

جـ) $|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $Arg\ a=-\frac{\pi}{4}$

$$w=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{-3+i}{2}}{\frac{1+i}{2}}=\frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$w=\frac{-3+4i+1}{2}=-1+2i$$

s تشابه نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{-\pi}{4}$ ومركزه $\Omega(-1,2)$

د/ التحقق من العلاقة:

$$w-z'=i(z-z')$$

$$w-z'=-1+2i-\frac{1-i}{2}z-\frac{-3+i}{2}$$

$$w-z'=\frac{1+3i}{2}-\frac{1-i}{2}z$$

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

$$i(z-z')=i\left(z-\frac{1-i}{2}z-\frac{-3+i}{2}\right)$$

$$i(z-z')=i\left(\frac{3-i}{2}+\frac{2-1+i}{2}z\right)$$

$$i(z-z')=\frac{1+zi}{2}-\frac{1-i}{2}z$$

أي $w-z'=i(z-z')$

طبيعة المثلث $\Omega MM'$:

لدينا : $\frac{w-z'}{z-z'}=i$

ومنه $|w-z'|=|z-z'|$ أي $\Omega M'=MM'$

$$\left(\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M\Omega}\right)=Arg\left(\frac{x-z'}{z-z'}\right)=\frac{\pi}{2}$$

المثلث $\Omega MM'$ قائم في M' ومتساوي الساقين .

/2 برهان أن (U_n) متتالية هندسية من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}=\left|z_{A_{n+2}}-z_{A_{n+1}}\right|$$

$$U_{n+1}=\left|\frac{1-i}{2}z_{A_{n+1}}+\frac{-3+i}{2}-\frac{1-i}{2}z_{A_n}-\frac{-3+i}{2}\right|$$

$$U_{n+1}=\left|\frac{1-i}{2}\left(z_{A_{n+1}}-z_{A_n}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}A_{n-1}\ A_n=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n$$

(U_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها الأول u_0:

$$U_0=A_0A_1=|z_1-z_0|=|-1-5|=6$$

3) أ)

$$V_n=V_0\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$V_n=12\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\sqrt{2}}$$

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\frac{12}{2-\sqrt{2}}$ لأن

$$-1\langle\frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1 \quad ، \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\to 0$$

أي (V_n) متقاربة .

التمرين الثالث

/1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطي

إذن (ABC) مستو .

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ الشعاع الناظمي لـ (ABC).

لدينا : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

$$\begin{cases}2a-c=0\\b+c=0\end{cases}\quad \text{أي} \quad \begin{cases}C=2a\\b=2a\end{cases}$$

$\vec{n}(1,-2,2)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (ABC)

لدينا : $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

$$1(x-1)-2(y-2)+2(z-2)=0$$

$$(ABC): x-2y+2z-1=0$$

2) $\begin{cases}x-2y+2z-1=0.........(1)\\x-3y+2z+2=0.........(2)\end{cases}$

$\vec{n}(1,-2,2)$ ، $\vec{n'}(1,-3,2)$ شعاعان ناظميان لـ (p_1) و (p_2) على الترتيب غير مرتبطين خطيا .

أي (p_1) و (p_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

/3 لدينا $\begin{cases}1-6+6-1=0\\1-9+6+2=0\end{cases}$

ومنه $c\in(\Delta)$

4) $\vec{u}.\vec{n}=2(1)+0(-2)-1(2)=0$

$\vec{u}.\vec{n}=2(1)+0(-3)-1(2)=0$

$\vec{u}$ يعامد $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ أي $\vec{u}$ هو أحد أشعة توجية (Δ).

5) التمثيل الوسيطي لـ (Δ) .

$\overrightarrow{CM}=k.\vec{u}$ / $k\in\Re$ أي

$$\begin{cases}x=2k+1\\y=3\\z=-k+3\end{cases}$$

/6 $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2k\\1\\-k+1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{u}=4k-1(-k+1)=0$$

نجد $\boxed{k=\frac{1}{5}}$

المسافة بين A و (Δ).

$$AM=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+(1)^2+\left(-\frac{1}{5}+1\right)^2}$$

$$AM=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

نسمة النجاح djelfa.info

التمرين الرابع:

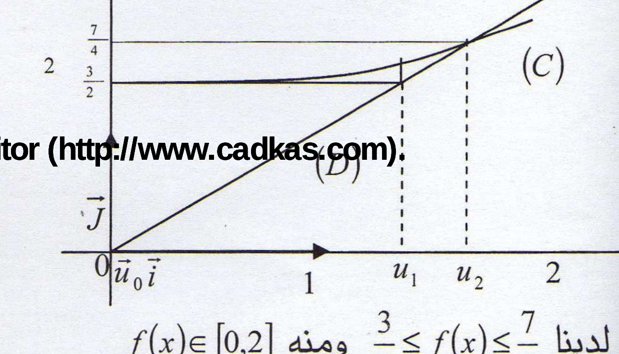
1/أ) f تقبل الإشتقاق على $[0,2]$:

$$f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$$

$f'(x)\rangle 0$ ومنه f متزايدة تمامًا على المجال $[0,2]$.

جدول التغيرات:

x	0	2
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$ ↗	$\frac{7}{4}$



جـ) لدينا $\frac{3}{2}\leq f(x)\leq\frac{7}{4}$ ومنه $f(x)\in[0,2]$

2) أ) (u_n) موجودة لأن:

$u_0=0$ ومنه $u_0\in[0,2]$

من أجل $u_n\in[0,2]$ يكون $f(u_n)\in[0,2]$ أي $u_{n+1}\in[0,2]$

د)

$$u_1=\frac{2u_0+3}{u_0+2}=\frac{3}{2}$$

$$u_2=\frac{2u_1+3}{u_1+2}=\frac{3+3}{\frac{3}{2}+2}=\frac{12}{7}$$

ب) تمثيل u_2,u_1,u_0

جـ) نلاحظ أن (u_n) متزايدة ومتقاربة

3) أ) لتكن $p(n)$ الخاصية: $0\leq u_n\leq\sqrt{3}$

$0\leq u_0\leq\sqrt{3}$ لأن $u_0=0$

أي $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي: $0\leq u_n\leq\sqrt{3}$

نبرهنه صحة $p(n+1)$ أي: $0\leq u_{n+1}\leq\sqrt{3}$

لدينا: $u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n+2}$

وَ $0\leq u_n\leq\sqrt{3}$ ومنه: $u_{n+1}\geq 0$

ولدينا: $u_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{2u_n+3}{u_n+2}-\sqrt{3}$

$$=\frac{2u_n+3-\sqrt{3}u_n-2\sqrt{3}}{u_n+2}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})u_n+(3-2\sqrt{3})}{u_n+2}$$

لدينا $u_n\leq\sqrt{3}$ ومنه

$$(2-\sqrt{3})u_n\leq 2\sqrt{3}-3$$

$$(2-\sqrt{3})u_n+3-2\sqrt{3}\leq 0$$

أي: $u_{n+1}-\sqrt{3}\leq 0$

ومنه $0\leq u_{n+1}\leq\sqrt{3}$

حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإن:

$0\leq u_n\leq\sqrt{3}$

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+3}{u_n+2}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3}{u_n+2}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(\sqrt{3}-u_n)(\sqrt{3}+u_n)}{u_n+2}$$

إشارة $u_{n+1}-u_n$ هي إشارة $\sqrt{3}-u_n$

وبما أن: $u_n\leq\sqrt{3}$ فإن $\sqrt{3}-u_n\geq 0$

إذن: $u_{n+1}\rangle u_n$ لكل عدد طبيعي n.

لدينا (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

جـ)

$$u_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{(2-\sqrt{3})u_n+(3-2\sqrt{3})}{u_n+2}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})u_n-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{u_{n+2}}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})(u_n-\sqrt{3})}{u_n+2}$$

اذن: $u_{n+1}-\sqrt{3}\leq\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$

Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).

تعيين : k

$$\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right| = \left|\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\right|\left|u_n-\sqrt{3}\right|$$

لدينا $0\le u_n\le \sqrt{3}$ ومنه $2\le u_n+2\le \sqrt{3}+2$

$$\frac{1}{u_n+2}\le\frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\right|\le\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

نضع $k\in \left]0,1\right[/ k=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$$\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right|\le k\left|u_n-\sqrt{3}\right|$$

بيان أن : $\left|u_n-\sqrt{3}\right|\le k^n\left|u_0-\sqrt{3}\right|$

لدينا :

$$\left|u_n-\sqrt{3}\right|\le k\left|u_{n-1}-\sqrt{3}\right|$$

$$\left|u_{n-1}-\sqrt{3}\right|\le k\left|u_{n-2}-\sqrt{3}\right|$$

$$\vdots$$

$$\left|u_2-\sqrt{3}\right|\le k\left|u_1-\sqrt{3}\right|$$

$$\left|u_1-\sqrt{3}\right|\le k\left|u_0-\sqrt{3}\right|$$

نضرب المتباينات طرفاً لطرف وبالاختزال نجد :

$$\left|u_n-\sqrt{3}\right|\le k^n\left|u_0-\sqrt{3}\right|$$

إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n\left|u_0-\sqrt{3}\right|=0$

لأن $0<k<1$

ومنه حسب مبرهنة الحصر فإن

$$\lim_{x\to+\infty}\left|u_n-\sqrt{3}\right|=0$$

أي :

$$\lim_{x\to+\infty} u_n=\sqrt{3}$$







Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).



دار الحديث للكتاب
Dar El Hadith Lil-Kitab

المقر المركزي: حي سعيدي أحمد فيلا 18 ليدو، برج الكيفان
الجزائر - الهاتف: 489 204 021
ملحق الوسط للتوزيع: 10 شارع محمد دوبة -حسين داي- الجزائر
هاتف فاكس: 324 470 021
البريد الإلكتروني: el.hadith@gmail.com

ISBN 978-9961-720-37-0



Changed with the DEMO VERSION of CAD-KAS PDF-Editor (http://www.cadkas.com).